

УДК 621.311

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОПЕРАЦИОННЫХ ЦИКЛОВ ЛЕСОПИЛЬНЫХ РАМ

© Агеев С.П., д-р техн. наук, доц.

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова,
наб. Северной Двины, 17, г. Архангельск, Россия, 163002

E-mail: doctor.mart11@mail.ru

Характерной особенностью процессов деревообработки является то, что в них постоянно проявляется воздействие различных случайных факторов. Поэтому для более полного изучения основных закономерностей функционирования производственных процессов на деревообрабатывающих предприятиях необходимо рассматривать их как разновидности случайных процессов. Одним из наиболее энергоемких деревообрабатывающих производств является лесопильное производство. При этом лесопильная рама, со сравнительно небольшой околостаночной механизацией составляющая отдельный участок, как наиболее мощный электроприемник в значительной степени определяет характер его электропотребления. Цель настоящей статьи – установление вероятностных закономерностей рабочих циклов распиловки древесины на лесопильных рамах.

Для проведения исследований предложена математическая модель нагружения механизма резания главного привода лесопильной рамы, согласно которой лесопильная рама рассматривается как система массового обслуживания. Для анализа продолжительности распиловки отдельных бревен использован метод этапов, разработанный А.К. Эрлангом.

С использованием предложенной модели найден закон распределения длительности рабочих циклов лесопильной рамы, показана зависимость параметров закона распределения от ее режимных параметров и геометрических характеристик распиливаемого сырья.

В результате исследований установлено, что длительность рабочих циклов лесопильных рам как случайная величина подчинена обобщенному закону распределения Эрланга $(k + 1)$ -го порядка. Согласно центральной предельной теореме при увеличении k обобщенный закон Эрланга неограниченно приближается к нормальному. Как показала практика моделирования технологических и энергетических процессов деревообработки, вполне удовлетворительную точность можно получить при аппроксимации законов Эрланга нормальным законом уже при $k \geq 15$. При этом средняя ошибка аппроксимации не более 0,001 %.

Полученные результаты могут быть использованы при анализе производительности и оптимизации параметров оборудования поточных линий, а также при решении вопросов нормирования электропотребления процессов лесопиления.

Ключевые слова: лесопильная рама, рабочий цикл лесопильной рамы, система массового обслуживания, плотность распределения вероятностей, дифференциальные уравнения, преобразование Лапласа, теорема свертывания, геометрические характеристики распиливаемого сырья.

Как известно, энергетические и технологические режимы в большинстве производственных процессов деревообработки взаимосвязаны. Поэтому при анализе электропотребления необходимо одновременно учитывать и особенности протекания технологических процессов с учетом влияния факторов, характеризующих как сам процесс, так и отдельные его операции.

Одним из наиболее энергоемких деревообрабатывающих производств является лесопильное. При этом лесопильная рама (ЛР) со сравнительно небольшой околостаночной механизацией составляет отдельный участок и как наиболее мощный электроприемник в значительной степени определяет характер его электропотребления [3].

Характерной особенностью процесса лесопиления является то, что в нем постоянно проявляется воздействие различных случайных факторов (форма и размеры пиловочных сортиментов, изменчивость продолжительности технологических операций и др.) [1]. В результате подача сырья к технологическим агрегатам происходит не ритмично, а с разными интервалами времени. Такие процессы не могут быть детерминированными, их необходимо рассматривать как разновидности случайных процессов.

Целью данной статьи является установление вероятностных закономерностей рабочих циклов распиловки древесины на лесопильных рамах, необходимых для решения задач нормирования электропотребления процессов деревообработки.

В работе [2] была представлена математическая модель нагружения механизма резания главного привода ЛР. Согласно этой модели лесопильная рама рассматривается как система массового обслуживания (СМО). Для анализа продолжительности распиловки отдельных бревен был использован метод этапов, разработанный А.К. Эрлангом [6]. По этому методу распиловка бревен рассматривается как случайный дискретный процесс, состоящий из ряда последовательно выполняемых этапов (стадий).

Пусть для распиловки некоторого бревна требуется выполнить k стадий процесса. Тогда моменты начала стадий будут характеризовать следующие состояния СМО: E_1, E_2, \dots, E_k . Рассматриваемая СМО действует таким образом, что когда обслуженное требование (бревно) покинет СМО, на ее вход поступает новое требование. Это новое требование занимает этап 1 (СМО переходит в состояние E_1) и находится в нем случайное время T_1 . После ухода из этапа 1 требование поступает на этап 2 (СМО переходит в состояние E_2) и будет находиться там случайное время T_2 и т.д. После окончания k -й стадии требование покидает СМО, а сама СМО переходит в состояние E_0 , обусловленное межторцовыми разрывами между бревнами. Только после этого в СМО может поступить новое требование, и она вновь переходит в состояние E_1 .

Найдем закон распределения длительности рабочих циклов $T_{ц}$ лесопильной рамы. Эта задача сводится к нахождению закона распределения времени пребывания СМО в состояниях $E_1, E_2, \dots, E_k, E_0$. Полагая, что переход требования от одного этапа к следующему осуществляется под воздействием

пуассоновского потока событий с интенсивностью λ , построим размеченный граф состояний СМО (рис. 1). Состояние E_{11} является поглощающим. Переход в него означает окончание текущего рабочего цикла и начало следующего.

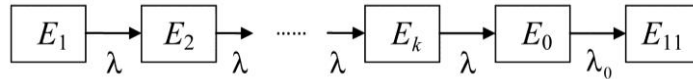


Рис.1. Размеченный граф состояний

Соответствующая этому графу система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t); \quad \frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda p_2(t) + \lambda p_1(t);$$

.....

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t); \quad \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \lambda p_k(t).$$

Начальные условия, при которых нужно интегрировать эти уравнения:

$$p_1(0) = 1; \quad p_2(0) = p_3(0) = \dots = p_0(0) = 0.$$

В соответствии с [1] вероятность

$$p_1(t) = e^{-\lambda t}.$$

Для отыскания вероятности $p_2(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_2(t)}{dt} + \lambda p_2(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Преобразуем это уравнение по Лапласу:

$$sP_2(s) + \lambda P_2(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda},$$

где s – параметр преобразования;

$P_2(s)$ – изображение функции $p_2(t)$.

Следовательно,

$$P_2(s) = \frac{\lambda}{(s + \lambda)^2}.$$

Используя таблицы изображения основных функций [7], найдем оригинал:

$$p_2(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Рассуждаем аналогично:

$$p_i(t) = \frac{(\lambda t)^{i+1}}{(i-1)!} e^{-\lambda t}; \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Для отыскания вероятности $p_0(t)$ составим дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_0(t)}{dt} + \lambda_0 p_0(t) = \lambda p_k(t).$$

Преобразуя это уравнение по Лапласу, получим

$$sP_0(s) + \lambda_0 P_0(s) = \lambda P_k(s) = \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(s + \lambda)^k},$$

откуда

$$P_0(s) = \frac{\lambda^k}{(s + \lambda_0)(s + \lambda)^k}. \quad (1)$$

Для нахождения оригинала функции $p_0(t)$ рассмотрим один из возможных методов, использующих теорему свертывания [7]. Для этого представим изображение (1) как произведение двух изображений:

$$P_0(s) = P_{01}(s)P_{02}(s), \quad (2)$$

где $P_{01}(s) \rightarrow p_{01}(t)$; $P_{02}(s) \rightarrow p_{02}(t)$.

Согласно теореме свертывания произведение (2) есть L -изображение функции $p_0(t)$, определенной интегралом с переменным верхним пределом:

$$P_0(s) = P_{01}(s)P_{02}(s) \rightarrow \int_0^t p_{01}(x)p_{02}(t-x)dx. \quad (3)$$

Приняв

$$P_{01}(s) = \frac{\lambda^k}{(s + \lambda)^k} \rightarrow \lambda^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} = p_{01}(t);$$

$$P_{02}(s) = \frac{1}{(\lambda_0 + s)} \rightarrow e^{-\lambda_0 t} = p_{02}(t),$$

согласно (3) получим

$$P_0(s) = \lambda^k \int_0^t \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda_0(t-x)} dx,$$

или

$$p_0(t) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda_0 t}}{(k-1)!} \int_0^t x^{k-1} e^{x(\lambda_0 - \lambda)} dx.$$

Функция распределения $F(t) = p(T_{11} \leq t)$ равна вероятности того, что к моменту времени t СМО выйдет из состояния E_0 (закончится холостой ход) и окажется в состоянии E_{11} (лесопильная рама приступит к распиловке очередного бревна).

Следовательно, $F(t) = p_{11}(t)$, откуда плотность распределения случайной величины T_{11}

$$f(t) = \frac{F(t)}{dt} = \frac{dp_{11}(t)}{dt} = \lambda_0 p_0(t),$$

или

$$f(t) = \lambda_0 \lambda^k \frac{e^{-\lambda_0 t}}{(k-1)!} \int_0^t x^{k-1} e^{x(\lambda_0 - \lambda)} dx. \quad (4)$$

Закон распределения, имеющий такую плотность вероятности, называется обобщенным законом Эрланга $(k + 1)$ -го порядка, так как случайная величина $T_{ц}$ является суммой $(k + 1)$ независимых случайных величин, распределенных по показательному закону. У этого закона k параметров равны λ , а один – λ_0 .

Для практического использования формулы (4) вычислим интеграл методом по частям. Тогда

$$f(t) = \lambda_0 \lambda^k e^{-\lambda_0 t} \left[\sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j+1} t^{k-j}}{(k-j)! (\lambda_0 - \lambda)^j} e^{(\lambda_0 - \lambda)t} + \frac{1}{(\lambda_0 - \lambda)^k} \right]. \quad (5)$$

Параметры закона распределения могут быть определены следующим образом.

В работе [2] было получено

$$\lambda = \frac{MT_p}{DT_p},$$

где MT_p – математическое ожидание времени распиловки одного бревна, с;

DT_p – дисперсия времени распиловки одного бревна, с².

Учитывая, что

$$MT_p = M\left(\frac{L}{u}\right) = \frac{ML}{u};$$

$$DT_p = D\left(\frac{L}{u}\right) = \frac{1}{u^2} DL,$$

имеем

$$\lambda = u \frac{ML}{DL},$$

где u – скорость подачи, м/с;

L – длина бревен, м;

ML, DL – математическое ожидание и дисперсия L в сортировочной партии.

Таким образом, параметр λ зависит от геометрических размеров распиливаемого сырья и скорости подачи бревен.

Как показали экспериментальные исследования, проведенные на лесозаводах г. Архангельска, длительность вспомогательного времени T_B за операционный цикл (межторцовый разрыв) является случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром λ_0 . Известно, что для показательного закона распределения математическое ожидание

$$MT_B = \frac{1}{\lambda_0}; \quad (6)$$

дисперсия

$$DT_B = \frac{1}{\lambda_0^2}. \quad (7)$$

Откуда

$$\lambda_0 = \frac{1}{MT_B}. \quad (8)$$

Таким образом, параметр λ_0 может быть определен экспериментальным путем.

Число стадий распиловки определяется по следующему выражению [2]:

$$k = \frac{(MT_p)^2}{DT_p} = \frac{(ML)^2}{DL}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что число стадий распиловки бревен не зависит от режимных параметров ЛР, а определяется только геометрическими характеристиками бревен в сортировочной партии.

Чтобы показать влияние геометрических размеров бревен на форму кривой плотности распределения обобщенного закона Эрланга, рассмотрим следующий пример.

Пример. На лесопильных рамах 2Р75-1/2 (мощность двигателя главного привода 110 кВт, частота вращения коленчатого вала 325 об/мин) осуществляется распиловка бревен с брусочкой при выпиливании одного бруса размерами $(0,60 \dots 0,73)d_B$ (где d_B – вершинный диаметр). Порода древесины – сосна, ель. Число пил в поставе – 8, шаг зубьев – 26 мм. Построим семейство кривых распределения Эрланга для следующих случаев:

- 1) длина бревен с $d_B = 20$ см есть случайная величина с математическим ожиданием $ML = 5,1$ м и дисперсиями $DL = 0,2$; $0,3$ и $0,4$ м²;
- 2) длины бревен с $d_B = 14$; 30 и 36 см есть случайные величины с математическим ожиданием $ML = 5,1$ м и дисперсией $DL = 0,4$ м².

Решение

1. Расчетные данные, необходимые для построения указанных кривых распределения, представлены в табл. 1. Расчетная техническая посылка, ограниченная шероховатостью поверхности пиломатериалов, заполнением впадин зубьев опилками и мощностью электродвигателя механизма резания ЛР согласно [4] $\Delta_p = 43$ мм. В этом случае скорость подачи $u = 0,233$ м/с.

Математическое ожидание длительности вспомогательного времени (межторцового разрыва) примем равным $MT_B = 1,9$ с, откуда параметр закона $\lambda_0 = 0,53$ с⁻¹ (см. формулу (8)). Тогда математические ожидания времени распиловки и рабочего цикла

$$MT_p = \frac{ML}{u} = \frac{5,1}{0,233} = 21,89 \text{ с}; \quad (10)$$

$$MT_{\text{ц}} = MT_p + MT_B = 21,89 + 1,90 = 23,79 \text{ с};$$

Дисперсия длительности рабочих циклов

$$DT_{\text{ц}} = DT_p + DT_B, \quad (11)$$

где $DT_B = 3,56$ с² (см. формулу (8)).

Таблица 1

Дисперсия $DL, м^2$	Число стадий распиловки k	Параметр $\lambda,$ $с^{-1}$	Дисперсия, $с^2$	
			DT_p	DT_c
0,2	130	5,94	3,69	7,25
0,3	87	3,96	5,53	9,09
0,4	65	2,97	7,37	10,93

2. Расчетные данные, необходимые для построения кривых распределения в зависимости от вершинного диаметра d_v бревен, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Диаметр бревен $d_v, см$	Расчетная посылка $\Delta p, мм$	Скорость подачи $u, м/с$	Параметр $\lambda,$ $с^{-1}$	Дисперсия $DT_c,$ $с^2$	Математическое ожидание $MT_c, с$
14	46	0,249	3,18	10,01	24,27
30	34	0,184	2,35	15,37	31,49
36	27	0,146	1,86	22,32	38,67

На рис. 2 и 3 представлены семейства кривых распределения закона Эрланга, рассчитанных по формуле (5).

Согласно центральной предельной теореме [5] при увеличении k обобщенный закон Эрланга ($k+1$)-го порядка неограниченно приближается к нормальному. Как показала практика моделирования технологических и энергетических процессов деревообработки, вполне удовлетворительную точность можно получить при аппроксимации законов Эрланга нормальным законом с

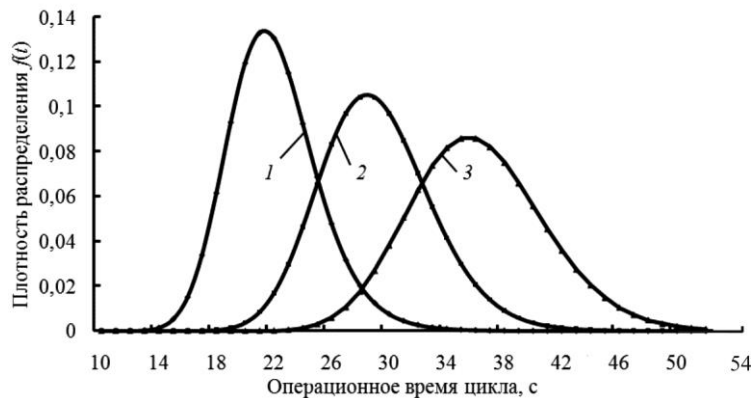


Рис. 2. Семейство кривых распределения закона Эрланга в зависимости от вершинного диаметра (d_v) бревен: 1 – $d_v = 14$ см; 2 – 30; 3 – 36 см

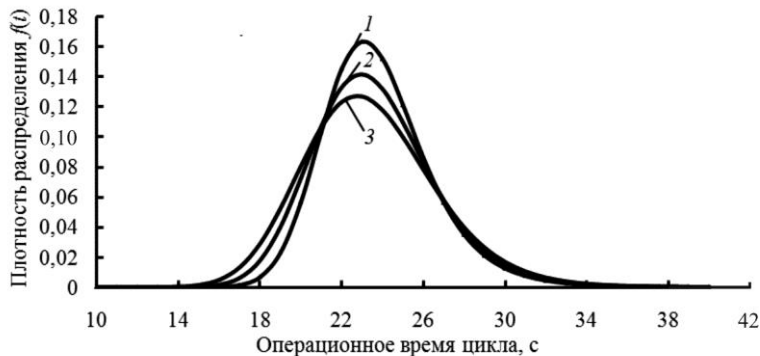


Рис. 3. Семейство кривых распределения закона Эрланга в зависимости от дисперсии длины бревен (DL) диаметром 20 см:
 $1 - DL = 0,2 \text{ м}^2$; $2 - 0,3$; $3 - 0,4 \text{ м}^2$

параметрами $MT_{ц}$ и $DT_{ц}$, вычисленными по формулам (10) и (11), уже при $k \geq 15$. При этом ошибка аппроксимации составила не более 0,01 %. Кривые распределения, представленные на рис. 2 и 3, также наглядно подтверждают указанный вывод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеев С.П., Мелехов В.И. Вероятностная модель производственного процесса лесопильного цеха // Актуальные проблемы развития лесного комплекса: материалы Междунар. науч.-техн. конф. 8–10 декабря 2009 г. Вологда, 2010. С. 91–93.
2. Агеев С.П. Математическое моделирование процессов распиловки древесины // СПБЛТА. Вып. 179. СПб: ЛТА, 2007. С. 142–152.
3. Агеев С.П. Показатели энергоиспользования лесопильных рам // Лесн. журн. 2009. № 3. С. 131 – 138. (Изв. высш. учеб. заведений).
4. Варфоломеев Ю.А., Дружинин И.С., Дьячков Ю.А. Справочник по лесопилению / Под ред. А.М. Копейкина. М.: Экология, 1991. 496 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие для втузов. М.: Высш. шк., 2000. 480 с.
6. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
7. Римский-Корсаков Б.С. Операционное исчисление. М.: Высш. шк., 1960. 146 с.

Поступила 17.10.12

Stochastic Pattern of the Sash Operating Cycles

Ageev S.P., Doctor of Engineering, Associate Professor

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Naberezhnaya Severnoy Dviny, 17, Arkhangelsk, 163002, Russia
 E-mail: doctor.mart11@mail.ru

The feature of woodworking is the appearing of forcing of various random factors actually. Therefore, for total analysis of basic regularity of the functioning flow process at woodworking enterprises these processes must be considered as the variety of random processes. One of the most energy-intensive carpentry is the sawmill generating. The sash with relatively small nearby machine mechanization is a separate plot, and as the most powerful electric collector, largely determines the nature of power. The purpose of this article is to establish the probability of timber sawing operational cycles on the sashes.

The mathematical model of loading the cutting device of the main sash drive is offered for carrying out the researches. According to this model, the sash is considered as a system of queuing. For the sawing length analysis of specific logs the step method has been used, designed by A.K. Erlang.

Using the ordered model, the distribution law of the operational cycle period of the sash has been found, the dependence of distribution law from the sash characteristic quantity and the geometric parameters of cutting raw materials has been shown.

The research found that the operational cycles period of the sash is submitted to the generalized Erlang distribution law ($k+1$) degree as a random quantity. According to the Central limit theorem under the buildup k the generalized Erlang law is closed to normal non-limiting. As the practice of modeling of engineering and energy woodworking process shows, fair accuracy can be find in the approximation of the Erlang laws to the normal law already by $k \geq 15$. The average error of the approximation was not more than 0.001%. The distribution curves, presented in the article, also confirm this conclusion.

The obtained results can be used in capability investigation and optimization of the conveyer equipment parameters, as well as in addressing the issues of normalization power consumption of cutting processes.

Keywords: sash, sash operational cycle, queuing system, the density of probability distributions, differential equations, Laplace transform, collapsing theorem, geometrical adjectives of cutting raw materials.

REFERENCES

1. Ageev S.P., Melekhov V.I. Veroyatnostnaya model' proizvodstvennogo protsessa lesopil'nogo tsekha [Probabilistic Model of the Production Process of Timber Shopfloor]. *Aktual'nye problemy razvitiya lesnogo kompleksa: mat. mezhdunar. nauchno-tekhn. konf.* [Actual Problems of Forestry Complex Development: Math. Intern. Tech. Sci. Conf.]. 8–10 December 2009. Vologda, 2010. pp. 91–93.
2. Ageev S.P. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov raspilovki drevesiny* [Mathematical Modeling of Sawing Wood Processes]. St. Petersburg, 2007, vol. 179, pp. 142–152.
3. Ageev S.P. Analiz elektropotrebleniya ramnykh lesopil'nykh potokov [Analysis of Power Consumption of Frame Sawing Threads]. *Sovershenstvovanie energeticheskikh sistem i tekhnologicheskogo oborudovaniya: Sb. nauch. tr.* [Development of Energy Systems and Technologic Equipment: Collected Papers]. 2012, pp. 17–23.
4. Varfolomeev Yu.A., Druzhinin I.S., D'yachkov Yu.A., et. al. *Spravochnik po lesopileniyu* [Sawmilling Guide]. Moscow, 1991. 496 p.

5. Venttsel' E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya veroyatnostey i ee inzhenernye prilozheniya* [Probability Theory and its Engineering Applications]. Moscow, 2000. 480 p.

6. Kleynrok L. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. Moscow, 1979. 432 p.

7. Rimskiy-Korsakov B.S. *Operatsionnoe ischislenie* [Operational calculus]. Moscow, 1960. 146 p.

