УДК 634.0.38

С. П. Дорохов

ОАО НПП «Старт»

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДВУХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА ЛЕСНОЙ МАШИНЫ

Приведены два метода решения уравнения Эйлера: первый метод заключается в использовании степенных рядов и применим к решению широкого класса дифференциальных уравнений произвольного порядка, во втором применяется современный пакет прикладных программ Maple9.

Ключевые слова: уравнение Эйлера, манипулятор, быстродействие, метод, решение.

Ранее нами [1] была рассмотрена задача поиска оптимальной по быстродействию траектории переноса груза манипулятором.

Рассматривался функционал

$$T = \int_0^l \frac{ds}{v_c}.$$

Здесь T – время перемещения центра груза – лесоматериала; l – длина кривой; ds – бесконечно малое приращение длины кривой; v_C – скорость центра груза.

Выразив скорость через параметры манипулятора, а длину кривой через координаты центра груза, приведем функционал к следующему виду:

$$T = \int_{x_{C_1}}^{x_{C_2}} \frac{\sqrt{1+y_c'^2}\,dx_c}{\sqrt{l_2^2\omega_2^2 + \omega_1\omega_2(l_1^2 - l_2^2) - \omega_1(\omega_2 - \omega_1)(x_c^2 + y_c^2)}}, \qquad (1)$$

где x_c, y_c – координаты центра груза;

l_1 – длина стрелы;

l_2 – расстояние от оси шарнирного соединения рукояти со стрелой до центра груза;

ω_1, ω_2 – угловая скорость стрелы и рукояти.

Рукоять манипулятора примем в качестве задающего органа, неизвестные функции ω_1 и y_C определялим из системы уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$F_{\omega_1} - \frac{d}{d_{x_C}} F_{\omega_1'} = 0; \qquad (2)$$

$$F_{y_c} - \frac{d}{dx_c} F_{y'_c} = 0. \tag{3}$$

Здесь $F_{\omega_1}, F_{\omega'_1}, F_{y_c}, F_{y'_c}$ обозначают частные производные подынтегральной функции функционала (1) по $\omega_1, \omega'_1 = \frac{d\omega_1}{dx_c}$ и $y_c, y'_c = \frac{dy_c}{dx_c}$.

В результате решения системы уравнений (2) и (3) получены зависимости для угловой скорости стрелы и траектории переноса груза:

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{2}\left(1 - \frac{l_1^2 - l_2^2}{x_c^2 + y_c^2}\right);$$

$$y''_c = \frac{\left(y_c - x_c y'_c\right)\left(1 + y'^2_c\right)\left(\left(x_c^2 + y_c^2\right)^2 - \left(l_1^2 - l_2^2\right)^2\right)}{\left(x_c^2 + y_c^2\right)\left[4 l_1^2 l_2^2 - \left(x_c^2 + y_c^2 - l_1^2 - l_2^2\right)^2\right]}. \tag{4}$$

Поиск экстремалей, т.е. кривых, на которых достигается экстремум функционала (1), сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (4).

Представляют интерес методы решения уравнения (4), которые могут быть использованы исследователями при решении задач оптимизации машин и механизмов в лесной промышленности.

Решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (4) методом степенных рядов. Метод степенных рядов применим как к линейным дифференциальным уравнениям, так и к очень широкому классу нелинейных дифференциальных уравнений произвольного порядка, что делает его незаменимым при изучении очень большого числа разнообразных технических задач [2].

Запишем дифференциальное уравнение (4) в развернутом виде:

$$\begin{gathered}
2\left(l_1^2 + l_2^2\right) x_c^4 y''_c + 4\left(l_1^2 + l_2^2\right) x_c^2 y_c^2 y''_c + 2\left(l_1^2 + l_2^2\right) y_c^4 y''_c - x_c^6 y''_c - \\
-3x''_c y_c^2 y''_c - 3x_c^2 y_c^4 y''_c - y_c^6 y''_c - \left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 x_c^2 y''_c - \left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 y_c^2 y''_c = \\
= x_c^4 y_c + x_c^4 y_c y'^2_c - x_c^5 y'_c - x_c^5 y'^3_c + 2x_c^2 y_c^3 + 2x_c^2 y_c^3 y'^2_c - 2x_c^3 y_c^2 y'_c - \\
-2x_c^3 y_{c2}^2 y'^3_c + y_c^5 + y_c^5 y'^2_c - x_c y_c^4 y'_c - x_c y_c^4 y'^3_c - \left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 y_c - \\
-\left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 y_c y'^2_c + \left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 x_c y'_c + \left(l_1^2 - l_2^2\right) x_c y'^3_c.
\end{gathered} \tag{5}$$

Как рекомендуется в [3], решение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, к которым относится уравнение (5), следует искать не в форме чистого степенного ряда, а в виде произведения некоторой степени на степенной ряд:

$$y_c = x_c^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_c^n. \qquad (6)$$

Коэффициент a_0 считается отличным от нуля в виду неопределенности показателя r.

Перепишем выражение (6) в виде

$$y_c = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_c^{r+n} \qquad (7)$$

и найдем его производные:

$$y_c' = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n x_c^{n+r-1}; \qquad (8)$$

$$y_c'' = \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_n x_c^{n+r-2}, \qquad (9)$$

где
$$\dot{a}_n = (n+r)a_n;\ \ddot{a}_n = (n+r)(n+r-1)a_n. \qquad (10)$$

Найдем также степени y_C и y_C':

$$y_c^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} x_c^{n+2r}; \qquad (11)$$

$$y_c^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(4)} x_c^{n+5r}; \qquad (12)$$

$$y_c^4 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(4)} x_c^{n+4r}; \qquad (13)$$

$$y_c^5 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(5)} x_c^{n+5r}; \qquad (14)$$

$$y_c^6 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(6)} x_c^{n+6r}; \qquad (15)$$

$$y_c'^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n^{(2)} x_c^{n+2(r-1)}; \qquad (16)$$

$$y_c'^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n^{(3)} x_c^{n+3(r-1)}, \qquad (17)$$

где
$$a_n^{(2)} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots + a_{n-1} a_1 + a_n a_0; \qquad (18)$$

$$a_n^{(3)} = a_0 a_n^{(2)} + a_1 a_{n-1}^{(2)} + \ldots + a_{n-1} a_1^{(2)} + a_n a_0^{(2)}; \qquad (19)$$

$$a_n^{(4)} = a_0^{(2)} a_n^{(2)} + a_1^{(2)} a_{n-1}^{(2)} + \ldots + a_{n-1}^{(2)} a_1^{(2)} + a_n^{(2)} a_0^{(2)}; \qquad (20)$$

$$a_n^{(5)} = a_0 a_n^{(4)} + a_1 a_{n-1}^{(4)} + \ldots + a_{n-1} a_1^{(4)} + a_n a_0^{(4)}; \qquad (21)$$

5

$$a_n^{(6)} = a_0^{(3)} a_n^{(3)} + a_1^{(3)} a_{n-1}^{(3)} + \ldots + a_{n-1}^{(3)} a_1^{(3)} + a_n^{(3)} a_0^{(3)}; \qquad (22)$$

$$\dot{a}_n^{(2)} = \dot{a}_0 \dot{a}_n + \dot{a}_1 \dot{a}_{n-1} + \ldots + \dot{a}_{n-1} \dot{a}_1 + \dot{a}_n \dot{a}_0; \qquad (23)$$

$$\dot{a}_n^{(3)} = \dot{a}_0 \dot{a}_n^{(2)} + \dot{a}_1 \dot{a}_{n-1}^{(2)} + \ldots + \dot{a}_{n-1} \dot{a}_1^{(2)} + \dot{a}_n \dot{a}_0^{(2)}. \qquad (24)$$

Подставим выражения (7)–(17) в уравнение (5):

$$\begin{gathered}
2\left(l_1^2 + l_2^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_n x_c^{n+r+2} + 4\left(l_1^2 + l_2^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_c^{n+3r} + \\
2\left(l_1^2 + l_2^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_c^{n+5r-2} - \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_n x_c^{n+r+4} - 3\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_c^{n+3r+2} - \\
-3\sum_{n=0}^{\infty} c_{n2} x_c^{n+5r} - \sum_{n=0}^{\infty} d_n x_c^{n+7r-2} - \left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_n x_c^{n+r} - \\
-\left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_c^{n+3r-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_c^{n+r+4} + \sum_{n=0}^{\infty} e_n x_c^{n+3r+2} - \\
-\sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n x_c^{n+r+4} - \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n^{(3)} x_c^{n+3r+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)} x_c^{n+3r+2} + \\
+2\sum_{n=0}^{\infty} q_n x_c^{n+3r+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} h_n x_c^{n+5r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(5)} x_c^{n+5r} + \sum_{n=0}^{\infty} j_n x_c^{n+7r-2} - \\
-\sum_{n=0}^{\infty} k_n x_c^{n+5r} - \sum_{n=0}^{\infty} l_n x_c^{n+7r-2} - \left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_c^{n+r} - \\
-\left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} m_n x_c^{n+3r-2} + \left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n x_c^{n+r} + \\
+\left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n^{(3)} x_c^{n+3r-2},
\end{gathered} \qquad (25)$$

где

$$b_n = a_0^{(2)} \ddot{a}_n + a_1^{(2)} a_{n-1} + \ldots + a_{n-1}^{(2)} \ddot{a}_1 + a_n^{(2)} \ddot{a}_0; \qquad (26)$$

$$c_n = a_0^{(4)} \ddot{a}_n + a_1^{(4)} \ddot{a}_{n-1} + \ldots + a_{n-1}^{(4)} \ddot{a}_1 + a_n^{(4)} \ddot{a}_0; \qquad (27)$$

$$d_n = a_0^{(6)} \ddot{a}_n + a_1^{(6)} \ddot{a}_{n-1} + \ldots + a_{n-1}^{(6)} \ddot{a}_1 + a_n^{(6)} \ddot{a}_1; \qquad (28)$$

$$e_n = a_0 \dot{a}_n^{(2)} + a_1 \dot{a}_{n-1}^{(2)} + \ldots + a_{n-1} \dot{a}_1^{(2)} + a_n \dot{a}_0^{(2)}; \qquad (29)$$

$$f_n = a_0^{(3)} \dot{a}_n^{(2)} + a_1^{(3)} \dot{a}_{n-1}^{(2)} + \ldots + a_{n-1}^{(3)} \dot{a}_1^{(2)} + a_n^{(3)} \dot{a}_0^{(2)}; \qquad (30)$$

$$q_n = a_0^{(2)} \dot{a}_n + a_1^{(2)} \dot{a}_{n-1} + \ldots + a_{n-1}^{(2)} \dot{a}_1 + a_n^{(3)} \dot{a}_0; \qquad (31)$$

$$h_n = a_0^{(2)}\dot{a}_n^{(3)} + a_1^{(2)}\dot{a}_{n-1}^{(3)} + ... + a_{n-1}^{(2)}\dot{a}_1^{(3)} + a_n^{(2)}\dot{a}_0^{(3)}; \quad (32)$$

$$j_n = a_0^{(5)}\dot{a}_n^{(2)} + a_1^{(5)}\dot{a}_{n-1}^{(2)} + ... + a_{n-1}^{(5)}\dot{a}_1^{(2)} + a_n^{(5)}\dot{a}_0^{(2)}; \quad (33)$$

$$k_n = a_0^{(4)}\dot{a}_n + a_1^{(4)} + a_1^{(4)}\dot{a}_{n-1} + ... + a_{n-1}^{(4)}\dot{a}_1 + a_n^{(4)}\dot{a}_0; \quad (34)$$

$$l_n = a_0^{(4)}\dot{a}_n^{(3)} + a_1^{(4)}\dot{a}_{n-1}^{(3)} + ... + a_{n-1}^{(4)}\dot{a}_1^{(3)} + a_n^{(4)}\dot{a}_0^{(3)}; \quad (35)$$

$$m_n = a_0\dot{a}_n^{(2)} + a_1\dot{a}_{n-1}^{(2)} + ... + a_{n-1}\dot{a}_1^{(2)} + a_n\dot{a}_0^{(2)}. \quad (36)$$

Приравняв в уравнении (25) коэффициенты при x в степени $n + r + 2$, $n + 3r$, $n = 5r - 2$, $n + r + 4$, $n + 3r + 2$, $n + 5r$, $n + 7r - 2$, $n + r$, $n + 3r - 2$ для случая, когда $n = 0$, получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&2\left(l_1^2 + l_2^2\right)\ddot{a}_0 = 0;\\
&4\left(l_1^2 + l_2^2\right)b_0 = 0;\\
&2\left(l_1^2 + l_2^2\right)C_0 = 0;\\
&-\ddot{a}_0 = a_0 - \dot{a}_0;\\
&-3b_0 = e_0 - \dot{a}_0^3 + 2a_0^3 - 2d_0;\\
&-3C_0 = 2f_0 - 2h_0 + a_0^5 - k_0;\\
&-d_{02} - = j_0 - l_0;\\
&-\left(l_1^2 - l_2^2\right)^2\ddot{a}_0 = -\left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 a_0 + \left(l_1^2 - l_2^2\right)^2\dot{a}_0;\\
&-\left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 b_0 = -\left(l_1^2 - l_2^2\right)^2 m_0 + \left(l_1^2 - l_2^2\right)^2\dot{a}_0^3.
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Подставим $n = 0$ в формулы (10), (26)–(36):

$$\dot{a}_0 = ra_0;\ \ddot{a}_0 = r(r-1)a_0;\ b_0 = r(r-1)a_0^3;$$
$$C_0 = r(r-1)a_0^5;\ d_0 = r(r-1)a_0^7;$$
$$e_0 = r^2a_0^3;\ f_0 = r^2a_0^5,\ q = ra_0^3;\ h = r^3a_0^5;$$
$$j_0 = r^2a_0^7;\ k_0 = ra_0^5;\ l_0 = r^3a_0^7; m_0 = r^2a_0^3.$$

Если подставить полученные значения в систему уравнений (37) и преобразовать, то получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&2a_0\left(l_1^2+l_2^2\right)r\left(r-1\right)=0;\\
&4a_0^3\left(l_1^2+l_2^2\right)r\left(r-1\right)=0;\\
&2a_0^5\left(l_1^2+l_2^2\right)r\left(r-1\right)=0;\\
&a_0\left(1-r\right)\left(r-1\right)=0;\\
&a_0^3\left(r^2-3r+2\right)\left(r-1\right)=0;\\
&a_0^5\left(2r^2-3r+1\right)\left(r-1\right)=0;\\
&a_0^7 r\left(r-1\right)^2=0;\\
&a_0\left(r+1\right)\left(r-1\right)=0;\\
&a_0^3 r\left(r+1\right)\left(r-1\right)=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Анализ (38) показывает, что система имеет решение при $r = 1$.

Коэффициенты a_n при $n \neq 0$ можно определить, приравняв к нулю в уравнении (25), например, коэффициенты при x_C в степени $n + r + 2$.

Имеем

$$2\left(l_1^2+l_2^2\right)\ddot{a}_n=2\left(l_1^2+l_2^2\right)\left(r+n\right)\left(n+r-1\right)a_n=0.$$

Откуда $a_n = 0$, где $n \neq 0$.

Таким образом, решением исходного дифференциального уравнения (4) является

$$y_C = a_0 x_C.$$

Решение уравнения (4) с помощью пакета прикладных программ Maple 9. Решение имеет следующий вид:

```
> Eq1:=(yC(xC)-xC*diff(yC(xC),xC))*(1+(diff(yC(xC),xC))^2)*((xC^2+yC(xC)^2)
  2-(l1^2-l2^2)^2)/((xC^2+yC(xC)^2)*(4*l1^2*l2^2-(xC^2+yC(xC)^2-l1^2-l2^2)^
  ))=diff(yC(xC),xCS2);
```

$$Eq1 := \frac{\left(yC(xC)-xC\left(\frac{d}{dxC}yC(xC)\right)\right)\left(1+\left(\frac{d}{dxC}yC(xC)\right)^2\right)\left(\left(xC^2+yC(xC)^2\right)^2-\left(l1^2-l2^2\right)^2\right)}{\left(xC^2+yC(xC)^2\right)\left(4\,l1^2\,l2^2-\left(xC^2+yC(xC)^2-l1^2-l2^2\right)^2\right)}=0$$

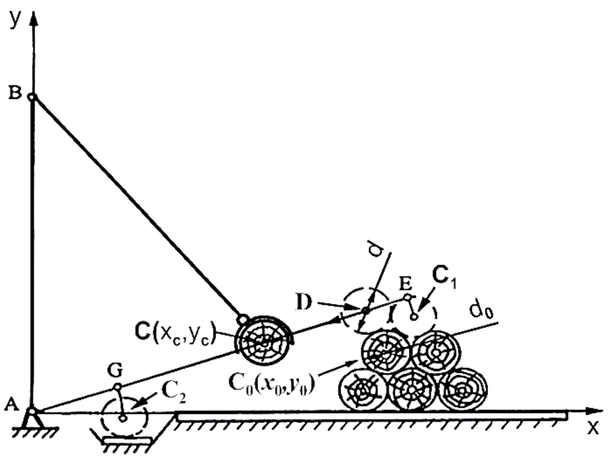
```
> Init_cond:=yC(xC0)=yC0;
```

$$Init\_cond := yC(xC0) = yC0$$

```
> dsolve({Eq1,Init_cond},yC(xC));
```

$$yC(xC)=\frac{yC0\,xC}{xC0},\ yC(xC)=\mathrm{RootOf}(\_Z^2+1)\,xC+yC0-\mathrm{RootOf}(\_Z^2+1)\,xC0$$

```
>
```



Оптимальная траектория переноса груза

Первое решение является уравнением прямой линии, проходящей через произвольную точку с координатами x_0, y_0, второе (аналитическое) решение записано через функцию Root Of и означает, что корень нельзя выразить в радикалах.

Получаем, что экстремум функционала (1) достигается на прямых радиальных линиях, проходящих через ось опорного шарнира A стрелы манипулятора. В структуру оптимальной траектории переноса груза (см. рисунок) входит отрезок радиальной прямой линии EG.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дорохов С.П.* Оптимизация по быстродействию траектории переноса груза манипулятором в раскряжевочной установке // Лесн. журн. 1988. № 4. С. 48–53. (Изв. высш. учеб. заведений).

2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Том II. М.: Физматгиз, 1962. 576 с.

3. *Фильчаков П.Ф.* Справочник по высшей математике. К.: Наук. думка, 1973. 743 с.

Поступила 13.07.11

S.P. Dorokhov

OAO NPP “Start”

Solution of the Euler Equation in a Speed-in-Action Problem for a Two-Link Vehicle Manipulator

The article describes two methods of solving the Euler equation. The first method involves using power series and can be applied to a wide range of differential equations of a random order. The second method involves using a modern Maple software package.

Key words: equation, Euler, manipulator, speed-in-action, method, solution.