ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 3 ЛЕСНОЙ ЖУРНАЛ 1985

УДК 630*30

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО АГРЕГИРОВАННОГО КРИТЕРИЯ И ЗОН ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ МОБИЛЬНОСТИ ПОТОКОВ ЛЕСНЫХ СКЛАДОВ

*Л. И. ГУЛЬКО*

ВНИПИЭИлеспром

Традиционная технология не отвечает современным требованиям по оперативному техническому перевооружению лесоскладского оборудования.

Автором выдвинута рабочая гипотеза о создании мобильной технологии лесных складов на базе бесфундаментно-блочного оборудования.

Результаты внедрения мобильной технологии в объединениях Тюменьлеспром, Свердлеспром, Красноярсклеспром и Новгородлес показали, что сроки ввода в действие потоков снижаются в 4—6 раз, капиталовложения и трудозатраты на строительно-монтажные работы (СМР) оборудования — в 3—8 раз при одновременном уменьшении расхода строительных материалов и полном исключении тяжелого ручного труда. Производительность мобильных потоков лесного склада увеличивается на 15—20 %. В настоящей статье приведены результаты исследований по разработке зон технологической мобильности для традиционных и мобильных потоков лесных складов построением линейного агрегированного критерия.

Разработанные [2] локальные критерии технологической мобильности отражают отдельные аспекты этого понятия, подводят к задаче определения зон технологической мобильности, т. е. выявления областей значений этих критериев для технологических объектов (ТО), принадлежность к которым позволит судить о наличии и (или) степени мобильности или «традиционности» любого ТО. Иными словами, полученные ряды значений критериев $K^{\text{тр}}_{\text{моб}}$, $K^{\text{кап}}_{\text{моб}}$, $K^{\text{ср}}_{\text{моб}}$, $K^{\text{ж.ц}}_{\text{моб}}$ (коэффициенты трудозатрат, капиталовложений, срока ввода в действие и жизненного цикла) должны служить основой таксономии. Такого рода задачи в формальном плане могут решаться различными методами кластер-анализа [1, с. 13—17]. Учитывая, однако, что критерии мобильности имеют схожую количественную структуру (все они безразмерны, изменяются на интервале [0; 1] и отражают относительные величины), представляется целесообразным построение комплексного агрегированного критерия, так что границы зон мобильности соответствуют определенным уровням значений этого критерия. Как будет показано ниже, все практически применимые критерии такого типа сводятся к линейным (в пространстве соответствующей размерности), поэтому предметом исследования должно являться построение л и н е й н о г о а г р е г и р о в а н н о г о к р и т е р и я технологической мобильности (ТМ).

В настоящей работе приведены модели линейного агрегирования критериев ТМ, где рассмотрены детерминированные модели для случая двух альтернатив с использованием коэффициентов мобильности [3].

Введем следующие определения и обозначения:

$i, j, k, l, m, n\ldots$ — целочисленные индексы;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \Theta\ldots$ — произвольные (возможно, пустые) мультииндексы;

$A_n = R^n$ — $n$-мерное евклидово пространство локальных критериев с фиксированной системой координат (начало координат — точка 0), точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$, скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$;

альтернатива $X^\alpha$ — конечное подмножество $R^n$, состоящее из $m_\alpha$ точек $\{x^{\alpha 1}, \ldots, x^{\alpha m_\alpha}\}$;

$\overset{\vee}{X}{}^\alpha$ — соответствующая матрица $m_\alpha \times n$ с элементами $\overset{\vee}{x}{}^{\alpha}_{kl} = x_l^{\alpha k}$;

${}^{\text{т}}\overset{\vee}{X}{}^\alpha$ — транспонированная матрица;

$V_n(\xi)$ — шар радиуса $\xi$ в $R^n$ с центром в 0;

$S_n(\xi)$ — его граница, сфера в $R^n$ (при $\xi = 1$ радиус не указывается, так что $V_n \equiv \equiv (1)$, $S_n \equiv S_n(1)$);

$\varkappa_n = \{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ — единичный симплекс в $R^n$, точки $r \in S_n$ отождествляются с линейными функционалами $\varphi_r(x) = \langle r, x \rangle$ нормы 1 или с гиперплоскостями $\pi_r = \{x \in R^n \mid \langle r, x \rangle = 0\}$ (фактически при таком отождествлении $S_n$ рассматривается как сфера в сопряженном пространстве $R^{n^*}$);

$\Pi_n$ — множество всех аффинных гиперплоскостей в $R^n$; $\Pi_n$ очевидным образом изоморфно $S_n \times R^1$; этот изоморфизм задается отображением $\langle r, \xi \rangle \to \pi_r + \xi r = \{x \in R^n \mid \varphi_r(x) = \xi\}$; соответствующая аффинная гиперплоскость обозначается через $\pi_r^\xi$;

$\tilde{X}^\alpha = \mathrm{Conv}(X^\alpha)$ — выпуклая оболочка $X^\alpha$. При соблюдении же обоих указанных ограничений задача агрегирования, во-первых, линеаризуется в пространстве $R^{(n+1)^k - 1}$ ($k$ — максимальная допустимая полная степень полинома) с помощью отображения

$$\psi_{n,k} : R^n \to R^{(n+1)^k - 1}, \ \psi_{n,k}((x_1, \ldots, x_n)) = (\{\pi x_j^{i_j}\}); \ \sum_{j=1}^{n} i_j \leqslant k,$$

а, во-вторых, разрешающая способность критерия $f$ вычисляется [6] по модифицированной формуле

$$d(f, \varkappa_1) = \min_{\alpha, \beta \in I} \rho\left(f(\tilde{X}^\alpha), f(\tilde{X}^\beta)\right) = \min_{\alpha, \beta \in I} \rho\left(\widetilde{f(X^\alpha)}, \widetilde{f(X^\beta)}\right). \tag{1}$$

Далее рассматриваем линейную модель агрегирования (предполагая, что отображение $\psi_{n,k}$ выполнено на этапе подготовки данных).

Под **оптимальным агрегированным** (**агрегирующим**) **критерием** будем понимать решение задачи

$$d(\varphi_r, \varkappa_1) \to \max \mid r \in S_n \tag{2}$$

(ограничение $r \in S_n$ играет роль нормирующего условия, соответствующие оптимальные значения будем обозначать через $d^*$, $\varphi^*$, $r^*$).

Случай двух альтернатив $X^1$, $X^2$ (мобильные и традиционные ТО без учета более тонких технологических различий) отличается от остальных, во-первых, наличием простого необходимого и достаточного условия существования агрегированного критерия, а, во-вторых, возможностью получения эффективного метода построения оптимального критерия.

Условие существования агрегированного критерия, согласно теореме Хана — Банаха [4], состоит в непересечении выпуклых оболочек: $\tilde{X}^1 \cap \tilde{X}^2 = \varnothing$.

Проверка этого условия сводится к задаче линейного программирования с переменными $(c_1, \ldots, c_{m_1}, c_{m_1+1}, \ldots, c_{m_1+m_2}) = (c^1, c^2) \in \varkappa_{m_1} \times \varkappa_{m_2}$, ограничениями (в канонической форме)

$$ {}^{\mathrm{T}}\check{X}^1 c^1 - {}^{\mathrm{T}}\check{X}^2 c^2 = 0; \tag{3}$$

$$ \sum_{i=1}^{m_1} c_i = \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} c_i = 1 \tag{4}$$

и произвольным линейным функционалом $f$ $(c^1, c^2)$ (иными словами, к поиску плана задачи (3)—(4)). Наличие плана (совместность задачи) эквивалентно несуществованию агрегированного критерия.

Приведем выкладки, обосновывающие алгоритм построения оптимального агрегирующего критерия. С геометрической точки зрения $d^*(f, \varkappa_1)$ совпадает с шириной самой широкой полосы между параллельными гиперплоскостями, разделяющими (в $A_n$) $X^1$ и $X^2$. Как известно [1], расстояние от точки $x$ до гиперплоскости $\pi = \varphi^{-1}(0)$ определяется по формуле $\rho(x, \pi) = \varphi(x)/\|\varphi\|$. Поскольку в задаче (2) рассматриваются функционалы $\varphi_r$ с $\|\varphi_r\| = 1$, из приведенной формулы нетрудно получить аналитическое выражение для $d(\varphi_r, \varkappa_1)$:

$$ d(\varphi_r, \varkappa_1) = \max(0, \min_{x \in X^1} \varphi_r(x) - \max_{y \in X^2} \varphi_r(y), \min_{y \in X^2} \varphi_r(y) - \max_{x \in X^1} \varphi_r(x)) \tag{5}$$

(если $\varphi_r$ различает $X^1$ и $X^2$, то одна из разностей в (5) отрицательна, другая — положительна).

Тем самым задача (2) сводится к паре задач квадратичного программирования с одним нелинейным ограничением

$$ v - u \to \max; \tag{6}$$

$$ \langle x^{ki}, r \rangle \leqslant u \qquad i = 1, \ldots, m_k; \tag{7}$$

$$ \langle x^{lj}, r \rangle \geqslant v \qquad j = 1, \ldots, m_l; \tag{8}$$

$$ \langle r, r \rangle = \|r\|^2 = 1, \tag{9}$$

где $\{k; l\} = \{1; 2\} \cup \{2; 1\}$; неизвестные — координаты вектора $r$; нелинейность создает только уравнение (9).

Рассмотрим другую форму этой задачи. Пусть (с точностью замены индексов) $\{k; l\} = \{2; 1\}$, т. е.

$$ v = \min_{x \in X^1} \varphi_r^*(x) > u = \max_{y \in X^2} \varphi_r^*(y); $$

пусть также

$$ \tilde{x}_*^1 \in X^1 \cap \varphi_r^{*-1}(v), \quad \tilde{x}_*^2 \in X^2 \cap \varphi_r^{*-1}(u). $$

Тогда очевидно,

$$d^* = d(\varphi_r^*, \varkappa_{\{k;\, l\}}) = v - u = \varphi_r^*(\tilde{x}_*^1 - \tilde{x}_*^2) = \langle r^*, \tilde{x}_*^1 - \tilde{x}_*^2 \rangle = \\ = \min_{\substack{x \in X^1 \\ y \in X^2}} \langle r^*, x - y \rangle.$$

Поэтому задача (6)—(9), а тем самым и (2) в случае двух альтернатив эквивалентна максиминной задаче $\max\limits_{r \in S_n} \min\limits_{z \in Z} \langle r, z \rangle$, где

$$\tilde{Z} = \operatorname{Conv}(X^1 - X^2) = \tilde{X}^1 - \tilde{X}^2.$$

Геометрически задача (10) означает отыскание наиболее удаленной от нуля аффинной гиперплоскости, опорной к $\tilde{Z}$ и разделяющей это множество и начало координат. При этом $d^* = \varphi_r^*(\tilde{Z} \cap \pi_{r^*}^{d^*})$. Покажем, что последняя задача сводится к отысканию расстояния от нуля до $\tilde{Z}$. В самом деле, наличие опорной к $\tilde{Z}$ аффинной гиперплоскости $\pi_{r\xi}^{\xi}$, находящейся на расстоянии $\xi$ от нуля, эквивалентно, по теореме Хана — Банаха, условию $V_n(\xi) \cap \tilde{Z} = \varnothing$. Поэтому

$$d^* = \sup\{\xi \mid V_n(\xi) \cap \tilde{Z} = \varnothing\} = \min\{\xi \mid V_n(\xi) \cap \tilde{Z} = \varnothing\} = \rho(0, \tilde{Z}).$$

Окончательно (2) превращается в задачу выпуклого сепарабельного (квадратичного) программирования с линейными ограничениями

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle \to \min \mid z \in \tilde{Z} \tag{11}$$

(если $z_*$ — решение этой задачи, то $d^* = \|z_*\|$, $r^* = z_*/d^*$).

Для решения подобных задач разработаны весьма эффективные алгоритмы, реализованные, например, в ППП (пакетах прикладных программ) MPS-X (адаптированная версия — ППП МП); отметим также наиболее эффективные в вычислительном отношении алгоритмы МЦТ (метод центров тяжести), ММЦТ (модифицированный метод центров тяжести), градиентный спуск с растяжением пространства — [5, 7].

Отметим лишь два обстоятельства: первое связано с оценкой точности решения при использовании этих алгоритмов, второе — с эффективной организацией вычислений.

Наиболее естественная мера погрешности при решении задачи (11) — относительная ошибка $\delta = \dfrac{\|\bar{Z} - Z_*\|}{d^*}$, где $\bar{Z}$ — приближенное решение. Во многих упомянутых алгоритмах решение оценивается по функционалу, иначе говоря, правило остановки формируется на основе значения $\nu = \dfrac{|\bar{d} - d^*|}{d^*}$, где $\bar{d}$ — приближение к оптимальному значению функционала. В задаче (11) эффективный пересчет точности по функционалу в точность по аргументу выполняется следующим способом. Последняя формула показывает, что при остановке алгоритма по достижении точности $\nu\bar{d} \in [(1-\nu)d^*;\ (1+\nu)d^*]$; проводя двумерное сечение шара $V_n((1+\nu)d^*)$ через точки $0$, $\bar{Z}$, $Z_*$, убеждаемся, что $\|\bar{Z} - Z_*\|$ ограничена максимальной длиной хорды, лежащей в кольце $V_2((1+\nu)d^*)/V_2((1-\nu)d^*)$, и оценивается как

$$\|\bar{Z} - Z_*\| \leqslant 2\sqrt{((1+\nu)d^*)^2 - ((1-\nu)d^*)^2} = 4d^*\sqrt{\nu},$$

откуда $\delta \leqslant 4\sqrt{\nu}$; следовательно, для решения задачи (11) с относительной ошибкой $r_*$ не более $\delta$ достаточно на вход алгоритма подать точность по функционалу $\nu = \delta^2/16$.

Второе обстоятельство заключается в том, что для поиска оптимального линейного агрегированного критерия нужны не все точки $x^{\alpha 1}, \ldots, x^{\alpha m_\alpha}$, а лишь те, которые являются крайними в $\widetilde{X}^\alpha$ (это относится и к случаю нескольких альтернатив, рассмотренному ниже). Очевидно, что все крайние точки $\widetilde{X}^\alpha$ лежат в $\overset{\alpha}{X}$, а также что среди точек из $X^\alpha$, доставляющих минимум или максимум любой из координат $x_i$, $i \in \overline{1, n}$, есть крайние. Тем самым первые $l (2 \leqslant l \leqslant m_\alpha)$ крайних точек могут быть найдены путем покоординатного поиска минимумов и максимумов координат (причем, если $\underline{\xi}_i(\overset{\alpha}{X})[\overline{\xi}_i(\overset{\alpha}{X})] = \{x \in \overset{\alpha}{X} | x_i = \min\limits_{y \in X^\alpha} [\max\limits_{y \in X^\alpha}] y_i\}$ состоит из нескольких точек, то выделение из этих подмножеств «заведомо крайних» точек связано, вообще говоря, с многократным применением операторов $\underline{\xi}_j$, $\overline{\xi}_j$ для различных $j$, не равных $i$).

Все остальные крайние точки (не лежащие на гранях $n$-мерного куба с ребрами, параллельными осями координат, описанного вокруг $\widetilde{X}^\alpha$) могут быть найдены, например, решением не более чем $m_\alpha - l$ задач линейного программирования:

$$L_k(I_k, \eta^k, j_k): \sum_{i \in I_k \setminus \{j_k\}} \eta_i^k x^{\alpha i} = x^{\alpha j_k}; \tag{12}$$

$$\sum_{i \in I_k \setminus \{j_k\}} \eta_i^k = 1, \tag{13}$$

где

$$I_{k+1} = \begin{cases} I_k, & \text{если } L_k \text{ несовместна;} \\ I_k \setminus \{j_k\} & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$I_1 = \overline{1, m_\alpha};$$

$$j_{k+1} = \min \{ j \mid x^{\alpha j} \in I_k \setminus \overline{I}_1;\quad j > j_k \};$$

$$j_1 = \min \{ j \mid x^{\alpha j} \in \overline{I}_1 \setminus I_1 \};$$

$\overline{I}_1$ — множество индексов $l$ крайних точек, найденных на первом этапе.

Последнее из множеств $I_k$ (при $j_{k-1} = \max \{ j \mid x^{\alpha j} \in \overline{I}_k \setminus I_1)$ совпадает с множеством номеров всех крайних точек $\widetilde{X}^\alpha$; линейный функционал в (12)—(13), как и в (3)—(4), произволен.

Назначение уровней оптимального агрегированного критерия может быть выполнено различными способами; ясно, что при различении двух альтернатив этот уровень $\lambda(\varphi^*)$ должен лежать в интервале

$$[a;\ b] = \left[\min\left(\max_{x \in X^1} \varphi^*(x),\ \max_{y \in X^2} \varphi^*(y)\right),\ \max\left(\min_{x \in X^1} \varphi^*(x),\ \min_{y \in X^2} \varphi^*(y)\right)\right].$$

Простейший способ назначения $\lambda(\varphi^*)$ — в центре этого интервала. Более обоснованным представляется, однако, назначение $\lambda(\varphi^*)$ с учетом вариации значений $\varphi^*$ на $X^1$, $X^2$. Это приводит к схеме пропорционального деления $[a;\ b]$, так что

$$\lambda(\varphi^*) = \frac{Ba + Ab}{A + B}, \tag{14}$$

**Агрегированные критерии технологической мобильности потоков для двух альтернатив (мобильные/традиционные ТО)**

| Альтернативы | Локальные критерии ТМ | Оптимальный агрегированный критерий | | | | | Формула мобильности |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Коэффициенты | Уровень | | Разрешающая способность | | |
| | | | центральный | пропорциональный | абсолютная | относительная | |
| $X^1$, $X_1^2$ | $K_{моб}^{тр}$, $K_{моб}^{кап}$ | 0,984; 0,180 | 0,132 | 0,095 | 0,112 | 0,227 | $0{,}984K_{моб}^{тр} - 0{,}180K_{моб}^{кап} \geqslant \frac{0{,}132}{0{,}095}$ |
| $X^1$, $X_2^2$ | То же | 0,984; 0,180 | 0,132 | 0,095 | 0,112 | 0,227 | $0{,}984K_{моб}^{тр} - 0{,}180K_{моб}^{кап} \geqslant \frac{0{,}132}{0{,}095}$ |
| $X^1$, $X_1^2$ | $K_{моб}^{тр}$, $K_{моб}^{кап}$, $K_{моб}^{ср}$ | 0,893; 0,201; 0,403 | 0,382 | 0,334 | 0,155 | 0,200 | $0{,}893K_{моб}^{тр} + 0{,}201K_{моб}^{кап} + 0{,}403K_{моб}^{ср} \geqslant \frac{0{,}382}{0{,}334}$ |
| $X^1$, $X_2^2$ | То же | 0,604; 0,104; 0,790 | 0,208 | 0,128 | 0,187 | 0,236 | $0{,}609K_{моб}^{тр} - 0{,}104K_{моб}^{кап} + 0{,}790K_{моб}^{ср} \geqslant \frac{0{,}208}{0{,}128}$ |
| $X_0^1$, $X_0^2$ | $K_{моб}^{тр}$, $K_{моб}^{кап}$, $K_{моб}^{ср}$, $K_{моб}^{ж.ц}$ | 0,773; 0,342; 0,282; 0,453 | 0,885 | 0,990 | 0,560 | 12,727 | $0{,}773K_{моб}^{тр} + 0{,}342K_{моб}^{ап} + 0{,}282K_{моб}^{ср} + 0{,}453K_{моб}^{ж.ц} \geqslant \frac{0{,}885}{0{,}990}$ |

где

$$A = \max_{y \in X^2} \varphi^*(y) - \min_{y \in X^2} \varphi^*(y);$$

$$B = \max_{x \in X^1} \varphi^*(x) - \min_{x \in X^1} \varphi^*(x)$$

(здесь, как и при выводе (10), для простоты предполагается, что $\max_{y \in X^2} \varphi^*(y) < \min_{x \in X^1} \varphi^*(x)$).

Качество оптимального агрегированного критерия $\varphi^*$ может быть оценено с помощью относительной разрешающей способности

$$\delta(\varphi^*, \varkappa_{\{1;\,2\}}) = \frac{d(\varphi^*, \varkappa_{\{1;\,2\}})}{\max(A, B)}, \tag{15}$$

т. е. приведением разрешающей способности (расстояния между гиперплоскостями $\pi^a_{r*}$, $\pi^b_{r*}$) к диапазонам значений критерия на самих альтернативах (ширине полос, образованных гиперплоскостями, параллельными $\pi^*_r$, описанных около альтернатив). По-видимому, можно считать вполне удовлетворительными значения $\delta(\varphi^*, \varkappa_{\{1;\,2\}}) \geqslant 0{,}2$, а минимальное значение $\delta(\varphi^*, \varkappa_{\{1;\,2\}})$, обеспечивающее 5 %-ное разрешение, составляет 0,10.

Таким образом, сформированы пять задач агрегирования для двух альтернатив: $\{X^1, X^2_1\}$ с локальными критериями $K^{\text{тр}}_{\text{моб}}$, $K^{\text{кап}}_{\text{моб}}$. В табл. 1 приведены результаты расчета и оценки оптимальных агрегированных критериев. Как показывают данные этой таблицы, уже первые два критерия $K^{\text{тр}}_{\text{моб}}$, $K^{\text{кап}}_{\text{моб}}$ дают достаточно устойчивую зону технологической мобильности потоков, причем ни критерий $\varphi^*$, ни его оценки $d(\varphi, \varkappa_1)$, $\delta(\varphi, \varkappa_1)$, ни уровни значений $\lambda(\varphi^*)$ не зависят в этом случае от того, приняты ли в качестве второй альтернативы $X^2_1$ или $X^2_2$. Агрегированный критерий $\varphi^* = 0{,}984K^{\text{тр}}_{\text{моб}} - 0{,}180\ K^{\text{кап}}_{\text{моб}}$ имеет достаточно высокую относительную разрешающую способность (0,227), и формула мобильности любого ТО по трудозатратам и капиталовложениям имеет вид:

$$\varphi^* = 0{,}984K^{\text{тр}}_{\text{моб}} - 0{,}180K^{\text{кап}}_{\text{моб}} \geqslant {}^{0{,}132}_{0{,}095}$$

в зависимости от того, принят центральный или пропорциональный уровень.

Разработанная теория агрегирования локальных критериев технологической мобильности лесных складов позволяет дать структурное разграничение по зонам мобильности для традиционных и мобильных потоков. Результаты теории технологической мобильности лесных складов являются необходимым материалом при разработке типовых и рабочих проектов мобильных технологических потоков для первичной обработки древесины. В настоящее время Гипролестрансом и НИИПЛесдревом разработаны типовые и рабочие проекты мобильных потоков на базе линии ЛО-67 с пачковой и на базе линии ЛО-15С с индивидуальной обработкой древесины, по которым построено более 20 мобильных потоков в леспромхозах. Кроме того, в разработанных автором Руководящих материалах по созданию мобильной технологии лесных складов, утвержденных Минлесбумпромом СССР, рекомендуется отраслевым НИИ и лесным вузам с 1984 г. приступить к разработке бесфундаментно-блочного оборудования.

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. Гренандер У. Лекции по теории образов.— М.: Мир, 1981.— 752 с. [2]. Гулько Л. И. Мобильная технология лесных складов.— Лесн. пром-сть, 1983, № 12, с. 22—23. [3]. Гулько Л. И. Трудоемкость строительно-монтажных работ лесоскладского оборудования.— М.: ВНИПИЭИлеспром, 1984.— 65 с. [4]. Дьедоно К. Курс современного анализа.— М.: Наука, 1971. — 321 с. [5]. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации.— М.: Наука, 1979.—384 с. [6]. Смирнов В. И. Курс высшей математики.—М.: Наука, 1967.— 278 с. [7]. Шор Н. З. О скорости сходимости метода обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 25—37.

Поступила 9 июля 1984 г.