

ХИМИЧЕСКАЯ ПЕРЕРАБОТКА ДРЕВЕСИНЫ

УДК 676.017

Б. П. ЕРЫХОВ, М. Я. НАТАНЗОН, И. В. ПОПОВ

Поволжский институт информатики, радиотехники и связи

ОЦЕНКА СУХОГО ТРЕНИЯ
МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

С помощью крутильного высокочастотного автоматического маятника (КВАМ-1) оценен вклад элемента Сен-Венана в процесс затухания свободных колебаний листовых материалов, а также проведены теоретический расчет и экспериментальная проверка исходных положений. Показано, что для целлюлозно-бумажных материалов необходимо учитывать кулоновское трение в соответствии с теорией линейной вязкоупругости.

By torsional high-frequency automatic pendulum KVAМ-1 the Sen-Venan element contributing to the damping of sheet materials free vibration has been evaluated, as well as the theoretical calculation and experimental test of initial conditions have been made. It is shown that it is necessary that Coulon friction for pulp and paper materials be taken into account due to the theory of linear viscosity-elasticity.

Наличие сухого трения в целлюлозно-бумажных и других гетерофазных материалах можно считать обоснованным [2, с. 83—90]. Однако, если теоретическая часть этого обоснования не может вызывать особых претензий, то экспериментальная, в основном, ограничивается констатацией того факта, что наличие сухого трения в бумаге приводит к непостоянству периодов колебаний в низкочастотном крутильном маятнике и отклонению графика временной амплитуды затухающих колебаний от экспоненты. Кстати, для стального образца эти отклонения не зафиксированы. Авторам статьи не удалось найти публикаций, в которых «внутренний» элемент сухого трения был бы измерен или грубо оценен.

Подавляющее большинство материаловедов, использующих теорию линейной вязкоупругости, либо вообще игнорируют наличие сухого трения во многих материалах, либо, не скрывая этого факта, априорно учитывают его как дополнительный вклад в вязкое трение. С прагматической точки зрения это и понятно, так как теория вязкоупругости элементы Сен-Венана вообще не рассматривает. Но если иметь в виду чисто научный подход к этой проблеме, то такое направление исследований является бесспорно приемлемым, но не строгим. Трудности, стоящие на пути корректного подхода, очевидны и заключаются в том, что из линейной задача превращается в нелинейную, в связи с чем возникают дополнительные математические и экспериментальные сложности. Опустив для краткости вывод зависимости силы сопротивления Q от обобщенной скорости смещения \dot{q} и амплитуды колебаний A от времени t [4], приведем на рис. 1 характерные графики этих кривых. Как видно из рис. 1, функция $Q(\dot{q})$ в случае сухого трения имеет разрыв, а экспонента $A = A_0 e^{-bt/2a}$ (b и a — обобщенные коэффициент вязкости и масса; $\delta = b/2a$ — обобщенный коэффициент затухания) заменяется на прямую $A = A_0 - pt$ ($p = \frac{4b}{cT}$; c — обобщенная крутильная жесткость; T — период колебаний).

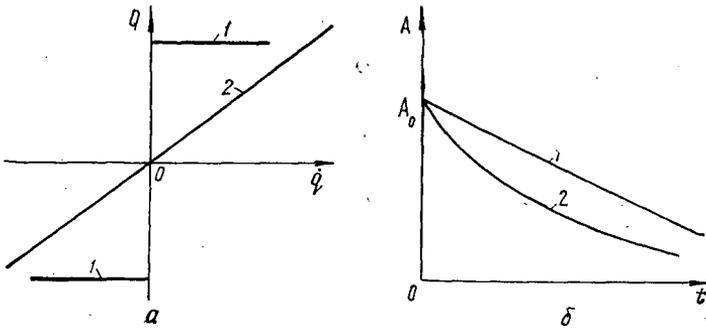


Рис. 1. Зависимость диссипативной силы Q от скорости смещения \dot{q} (а) и амплитуды колебаний A от времени t (б) для сухого (1) и вязкого (2) трения

Имея одну экспериментально полученную кривую затухающих крутильных колебаний, попробуем оценить вклад вязкого и сухого трения по отдельности.

Для решения поставленной задачи приведем две методики измерений.

Методика амплитудных измерений

Для продольного маятника с сухим трением эта задача решена в работе [5], для крутильного — [2, с. 86—87]. Рассмотрим ее подробнее.

Запишем основное уравнение крутильных колебаний с сухим и вязким трением:

$$I\ddot{\varphi} + \eta\dot{\varphi} + c\varphi + M \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}) = 0, \quad (1)$$

- где I — момент инерции колеблющейся системы;
 φ — угол закручивания;
 η — динамическая сдвиговая вязкость;
 c — крутильная жесткость;
 M — момент сил сухого трения.

Функция $\operatorname{sgn}(\dot{\varphi})$ введена в уравнение (1) для объяснения разрывного вида характеристики сухого трения (рис. 2).

Для упрощения уравнения (1) заменим производные по времени на производные по $\tau = \omega_0 t = \sqrt{c/I} t$ ($\omega_0 = \sqrt{c/I}$ — круговая частота свободных колебаний). После этого (1) примет вид

$$\varphi'' + 2D\varphi' + \varphi + \mu \operatorname{sgn}(\varphi') = 0, \quad (2)$$

где $D = \eta/2\sqrt{cI}$ и $\mu = M/c$ — соответственно безразмерные коэффициенты вязкого и сухого трения.

На рис. 3 приведена условная осциллограмма затухающего колебательного процесса с соответствующими обозначениями, которые будут использованы в дальнейшем.

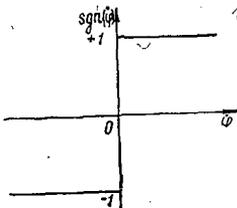


Рис. 2. График функции $\operatorname{sgn}(\dot{\varphi})$

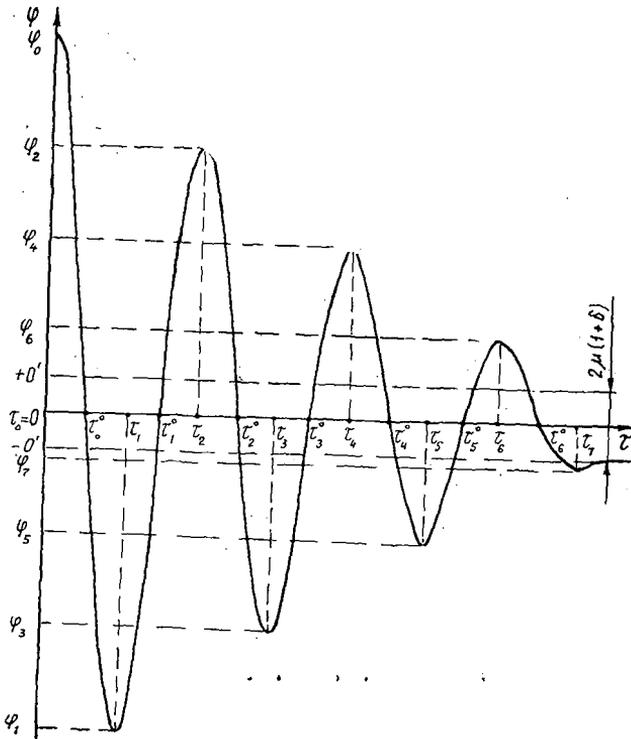


Рис. 3. Характерная осциллограмма затухающего колебательного процесса при наличии вязкого и сухого трения

Из-за разрывности функции $\text{sgn}(\varphi')$ решение уравнения (2) будем искать отдельно на интервалах, где «скорость» системы φ' постоянна по знаку. Рассмотрим интервал от $\tau = 0$ (начало колебаний) до $\tau = \tau_1$, при котором система имеет отклонение в сторону, противоположную первоначальному φ_0 . В этом интервале φ уменьшается, а $\varphi' < 0$. Тогда для интервала $0 \leq \tau \leq \tau_1$ с учетом знака $\text{sgn}(\varphi') = -1$ получим следующее уравнение

$$\varphi'' + 2D\varphi' + \varphi = \mu. \tag{3}$$

Для $D < 1$ и $\mu < \varphi_0$ запишем решение уравнения (3) при начальных условиях $\tau = 0$; $\varphi = \varphi_0 > 0$; $\varphi' = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \mu + (\varphi_0 - \mu) e^{-D\tau} \left[\frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\sqrt{1-D^2} \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\sqrt{1-D^2} \tau) \right]; \\ \varphi' &= -\frac{\varphi_0 - \mu}{\sqrt{1-D^2}} e^{-D\tau} \sin(\sqrt{1-D^2} \tau). \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

При $\tau = \tau_1$ достигается первая точка возврата, в которой $\sqrt{1-D^2} \tau_1 = \pi$ и, следовательно, $\tau_1 = \pi / \sqrt{1-D^2}$. Амплитуда φ_1 будет выражена как

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \mu + (\varphi_0 - \mu) e^{-D\tau_1} \left[\frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin \pi + \cos \pi \right] = \\ &= \mu - (\varphi_0 - \mu) e^{-\pi D / \sqrt{1-D^2}} = -\varphi_0 e^{-\pi D / \sqrt{1-D^2}} + \mu (1 + e^{-\pi D / \sqrt{1-D^2}}). \end{aligned}$$

Введя обозначение $e^{-\pi D/\sqrt{1-D^2}} \equiv \delta$, получим

$$\varphi_1 = -\varphi_0\delta + \mu(1 + \delta). \quad (5)$$

Достигнув максимального отрицательного отклонения φ_1 при $\tau = \tau_1$, система начнет двигаться обратно. В этом случае $\varphi' > 0$, $\text{sgn}(\varphi') = 1$ и уравнение (3) при новых граничных условиях ($\tau = \tau_1$; $\varphi = \varphi_1$; $\varphi' = 0$) примет следующий вид:

$$\varphi'' + 2D\varphi' + \varphi = -\mu. \quad (6)$$

Для интервала $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ решение уравнения (4) будет аналогичным при условии замены φ_0 на φ_1 , μ на $-\mu$, а τ на $\tau - \tau_1$. Пусть μ столь мало, что $\varphi_1 + \mu$ еще отрицательно, а $\varphi' > 0$ для $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. Положительное максимальное значение φ_2 достигается при $\tau = \tau_2$ (рис. 3). С учетом того, что $\sin[\sqrt{1-D^2}(\tau - \tau_1)] = 0$, получаем $\tau - \tau_1 = \pi/\sqrt{1-D^2}$, а $\varphi_2 = -\varphi_1\delta - \mu(1 + \delta)$. Далее действуем последовательно и в итоге получаем систему из n уравнений для углов отклонения φ_i :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\varphi_0\delta + \mu(1 + \delta); \\ \varphi_2 &= -\varphi_1\delta - \mu(1 + \delta); \\ \varphi_3 &= -\varphi_2\delta + \mu(1 + \delta); \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_n &= -\varphi_{n-1}\delta - (-1)^n\mu(1 + \delta). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Рассмотрим только положительные отклонения $\varphi_0, \varphi_2, \varphi_4, \dots$, которые обозначим через $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0\delta^2 - \mu(1 + \delta)^2; \\ \alpha_2 &= \alpha_1\delta^2 - \mu(1 + \delta)^2; \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_n &= \alpha_{n-1}\delta^2 - \mu(1 + \delta)^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Определив из эксперимента три последовательных отклонения в одну сторону от положения равновесия ($\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$), вычислим μ и δ по следующим формулам:

$$\delta = \sqrt{\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}}{\alpha_n - \alpha_{n+1}}}; \quad (9)$$

$$\mu = \frac{(\alpha_n + \alpha_{n+1})\delta^2 - (\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2})}{2(1 + \delta)^2}.$$

Откуда

$$D \simeq \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{\delta}. \quad (9a)$$

Таким образом, для реализации этой методики нужен прибор, позволяющий с приемлемой точностью измерять последовательность максимальных отклонений системы от положения равновесия, в котором она находилась до начала внешнего воздействия.

Методика временных измерений

Наличие элемента Сен-Венана приводит к тому, что начальное положение равновесия сдвигается после силового воздействия, и его «размах» равен $2\mu(1 + \delta)$ (рис. 3).

Без учета сухого трения система проходит положение равновесия при $\tau_n^0 = \frac{\pi}{2} \frac{n}{\sqrt{1-D^2}}$. Сдвиг положения равновесия при наличии сухого трения приводит к отклонению от этого равенства. По величине отклонения можно количественно оценить сухое трение.

Решение уравнения (1) для интервала $\tau_n \leq \tau \leq \tau_{n+1}$ имеет вид

$$\varphi(\tau_n) = (-1)^{n\mu} + (\varphi_n - (-1)^{n\mu}) \left\{ \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \times \right. \\ \left. \times \sin [\sqrt{1-D^2}(\tau - \tau_n)] + \cos [\sqrt{1-D^2}(\tau - \tau_n)] \right\} \exp [-D(\tau - \tau_n)]. \quad (10)$$

Здесь

$$\tau_n = \frac{\pi n}{\sqrt{1-D^2}}; \\ \varphi_n = -\varphi_{n-1} \delta - (-1)^{n\mu} (1 + \delta); \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Учтя, что для многих целлюлозно-бумажных материалов $D \ll 1$ и $\mu \ll \varphi_0$, упростим это уравнение:

$$\tau_n \simeq \pi n; \quad \exp [-D(\tau_n^0 - \tau_n)] \simeq 1 - D(\tau_n^0 - \tau_n); \\ \sin [\sqrt{1-D^2}(\tau_n^0 - \tau_n)] \simeq \sin(\tau_n^0 - \tau_n); \\ \cos [\sqrt{1-D^2}(\tau_n^0 - \tau_n)] \simeq \cos(\tau_n^0 - \tau_n). \quad (11)$$

Приняв во внимание обстоятельство, что $\tau_n^0 - \tau_n$ мало отличается от $\pi/2$, преобразуем:

$$\tau_n^0 - \tau_n \simeq \tau_n^0 - n\pi = \tau_n^0 - n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (1 + x_n^0), \quad (12)$$

где
$$x_n^0 = \frac{2\tau_n^0 - (2n+1)\pi}{\pi} \ll 1 \text{ при любом } n.$$

Величина x_n^0 показывает отклонение точки пересечения положения равновесия от $n \frac{\pi}{2}$. Подставив значение $\tau_n^0 - \tau_n$ из (12) в (11), получим

$$\sin \frac{\pi}{2} (1 + x_n^0) \simeq 1; \quad \cos \frac{\pi}{2} (1 + x_n^0) \simeq -\frac{\pi}{2} x_n^0.$$

С учетом того, что $\delta = 1 - \pi D$

$$\varphi_n = (-1)^n [\varphi_0 (1 - n\pi D - 2n\mu)]. \quad (13)$$

Поставив φ_n из (13) в уравнение (1), преобразуем его:

$$\varphi(\tau_n^0) = (-1)^n \{ \mu + [\varphi_0 (1 - n\pi D - (2n+1)\mu)] \times \\ \times \left(D - \frac{\pi}{2} x_n^0 \right) \left[1 - D \frac{\pi}{2} (1 + x_n^0) \right] \} = 0.$$

Оставив члены не выше второго порядка малости для D , μ , x_n^0 , запишем

$$\mu + \varphi_0 D - \frac{\varphi_0 \pi}{2} x_n^0 - \varphi_0 n\pi D^2 + \frac{\varphi_0 n \pi^2}{2} D x_n^0 - (2n+1)\mu D + \\ + \frac{(2n+1)}{2} \pi \mu x_n^0 - \frac{\varphi_0 \pi}{2} D^2 + \frac{\varphi_0 \pi^2}{4} D x_n^0 = 0.$$

Используя только линейные члены для D , μ и x_n^0 , получим формулу для μ :

$$\mu = \varphi_0 \left(\frac{\pi x_n^0}{2} - D \right), \quad (14)$$

связывающую характеристики сухого μ и вязкого D трения с временными интервалами вдоль «идеального» положения равновесия системы. (Под «идеальным» положением подразумевается положение равновесия при отсутствии сухого трения в материале.) Очевидно, что при наличии только вязкого трения «идеальное» положение равновесия совпадает с действительным.

Так как точность измерения временных интервалов по сравнению с амплитудными измерениями, как правило, существенно выше, то описанный метод представляется более перспективным. В настоящее время эта методика еще недостаточно отработана, потому давать окончательную оценку ее использования еще рано.

Экспериментальная часть работы проведена на приборе КВАМ-1* (крутильный высокочастотный автоматический маятник), являющемся модификацией установки типа УРОМС (установка для резонансного определения модуля сдвига и добротности листовых материалов) [3].

Под научным руководством Поволжского института информатики, радиотехники и связи (г. Самара) в экспериментальных производственных мастерских Центрального научно-исследовательского института бумаги (г. Москва) разработана механическая часть прибора, фирмой «АДЭКС» (г. Самара) — электронная часть и программное обеспечение.

Прибор КВАМ-1 работает в режиме свободных крутильных колебаний, реализуемых подачей единичного импульса напряжения на катушку возбуждения системы. После начала колебаний компьютер с заданной частотой опрашивает опто-электронный датчик смещения о местонахождении колебательной системы. После преобразования эти данные выводятся на экран видеомонитора в виде осциллограммы. Для повышения точности временных и амплитудных параметров в программе предусмотрена и возможность табличного представления данных.

В соответствии с техническим заданием в приборе КВАМ-1 не предусмотрена возможность измерения истинного положения колебательной системы и все данные представлены в относительных единицах АЦП (от -512 до $+511$). Для численных расчетов, в соответствии с [1], получено соотношение для перевода единиц АЦП в радианы (1 ед. АЦП $\sim 2,7 \cdot 10^{-8}$ рад при амплитуде смещения датчика порядка 1 мкм и длине плеча коромысла, равной 73 мм).

Наличие переходных процессов после возбуждающего систему импульса напряжения, сопоставимость амплитуд колебаний на конце осциллограммы с уровнем шума и неопределенность измерений амплитуд при их дискретном отсчете вынудили для оценки сухого трения разработать и реализовать модифицированный метод амплитудных измерений, суть которого сводится к следующему.

Чтобы не зависеть от положения равновесия, рассмотрим сумму модулей $\varphi_0 + \varphi_1$, $\varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_2 + \varphi_3$, ..., которые обозначим через φ_{01} , φ_{12} , φ_{23} , ... (рис. 3). Величины φ_{01} , φ_{12} , φ_{23} с максимальной достоверностью могут быть измерены в средней части осциллограммы затухающих колебаний.

* Авторы благодарят своих коллег по разработке нового прибора КВАМ-1 и спонсора ТПФ «Вагет».

Запишем уравнение для модулей $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ из системы уравнений (1)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \delta - \mu (1 + \delta); \\ \varphi_2 &= \varphi_1 \delta - \mu (1 + \delta); \\ \varphi_3 &= \varphi_2 \delta - \mu (1 + \delta). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Введем для анализа параметр $\varepsilon \equiv 1 - \delta$, мало отличающийся от нуля. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{01} &= 2\varphi_0 - \varphi_0\varepsilon - 2\mu + \mu\varepsilon; \\ \varphi_{12} &= 2\varphi_0 - 3\varphi_0\varepsilon - 6\mu + 5\mu\varepsilon + \varphi_0\varepsilon^2; \\ \varphi_{23} &= 2\varphi_0 - 5\varphi_0\varepsilon - 10\mu + 13\mu\varepsilon + 4\varphi_0\varepsilon^2 - \varphi_0\varepsilon^3. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Решив эту систему относительно неизвестных φ_0, μ и ε , получим

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_{01}(-12 + 16\varepsilon - 5\varepsilon^2 + \varepsilon^3) + \varphi_{12}(4 - 4\varepsilon - \varepsilon^2)}{8(2 - \varepsilon)(\varepsilon - 1)}; \quad (17)$$

$$\mu = \frac{\varphi_{01}(-2 + 3\varepsilon - \varepsilon^2) + \varphi_{12}(2 - \varepsilon)}{8(\varepsilon - 1)}. \quad (18)$$

Для нахождения ε решим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \varepsilon^6(-\varphi_{01}) + \varepsilon^5(9\varphi_{01} - \varphi_{12}) + \varepsilon^4(-28\varphi_{01} + 8\varphi_{12}) + \varepsilon^3(28\varphi_{01} - \\ - 12\varphi_{12}) + \varepsilon^2(16\varphi_{01} - 24\varphi_{12} + 8\varphi_{23}) + \varepsilon(-40\varphi_{01} + 64\varphi_{12} - \\ - 24\varphi_{23}) + 16\varphi_{01} - 32\varphi_{12} + 16\varphi_{23} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Выясним, какой степенью ε можно ограничиться. Для этого разберем числовой пример с наиболее типичными параметрами колебательной системы, ед. АЦП: $\varphi_0 = 400$; $\varepsilon = 0,15$; $\mu = 2$. После подстановки этих значений в формулы (16) и (17) получим

$$\varphi_1 = \varphi_0(1 - \varepsilon) - \mu(2 - \varepsilon) = 336;$$

$$\varphi_2 = \varphi_1(1 - \varepsilon) - \mu(2 - \varepsilon) = 282;$$

$$\varphi_3 = \varphi_2(1 - \varepsilon) - \mu(2 - \varepsilon) = 236;$$

$$\varphi_{01} = \varphi_0 + \varphi_1 = 736;$$

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2 = 618;$$

$$\varphi_{23} = \varphi_2 + \varphi_3 = 518.$$

Уравнение (19) примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^6(-736) + \varepsilon^5(6006) + \varepsilon^4(-15664) + \varepsilon^3(13192) + \\ + \varepsilon^2(1088) + \varepsilon(-2320) + 288 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Решим уравнение (20), ограничившись сначала 1-й степенью ε , потом 2-й и т. д. Сравним значения ε, μ и φ_0 , полученные по формулам (17), (18), (19), с их истинными значениями.

Анализ табл. 1 показывает, что только уравнение 4-й степени (19) дает удовлетворительное согласование с истинными значениями ε, μ и φ_0 ($\varepsilon = 0,15$; $\mu = 2$; $\varphi_0 = 400$).

Таким образом, алгоритм расчета для оценки сухого трения сводится к следующим процедурам:

- 1) отбрасываем первые 2—3 колебания;
- 2) вычисляем суммы модулей $\varphi_{01}, \varphi_{12}, \varphi_{23}$;
- 3) получаем параметр ε , решая уравнение (19);

Таблица 1

Сте- пень ϵ	ϵ	μ	φ_0
1	0,1241	7,10	399,5
2	0,1324	5,50	399,6
3	0,1586	0,34	400,0
4	0,1508	1,90	400,0
5	0,1512	1,80	400,0

Таблица 2

n	0	1	2	3	4	5
φ_n	266	-219	188	-155	132	-108

4) находим μ по формуле (18);

5) определим D по формуле $D = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{1-\epsilon}$.

В табл. 2 приведены опытные данные для типографской бумаги № 2. Используя вышеприведенный алгоритм расчета, получим:

$$\epsilon = 0,1324; \quad \varphi_0 = 260; \quad \mu = 2,8; \quad D = 0,045.$$

Переведем μ из относительных единиц АЦП: $\mu = 7,5 \cdot 10^{-8}$ рад.

В табл. 3 представлено сопоставление экспериментальных углов отклонения $\varphi_{оп}$ для бумаги с углом отклонения, рассчитанного при наличии сухого $\varphi_{с.т}$ и эквивалентного $\varphi_{э.т}$ трения.

Таблица 3

Пока- зате- ли	Значения показателей при различных n					
	0	1	2	3	4	5
$\varphi_{оп}$	260	221	187	156	131	109
$\varphi_{с.т}$	260	221	186	157	131	109
$\varphi_{э.т}$	260	219	184	154	130	109

По данным табл. 3 при наличии сухого трения имеем среднее квадратичное отклонение $\sigma_{с.т} = \sqrt{2}$, эквивалентного — $\sigma_{э.т} = 3\sqrt{2}$, т. е. в три раза больше. Таким образом, модель, учитывающая сухое трение,

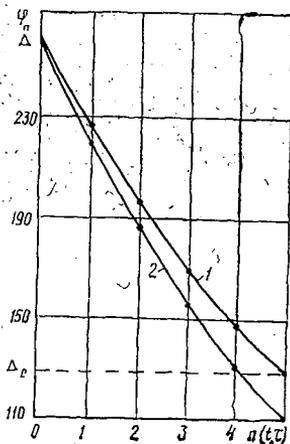


Рис. 4. Огибающие амплитуд затухающих свободных колебаний в бумаге с учетом только вязкого трения (1) и реальной огибающая (2)