



## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ОБМЕН ОПЫТОМ

УДК 674.093:658.26

*С.П. Агеев*

Агеев Сергей Петрович родился в 1957 г., окончил в 1979 г. Архангельский лесотехнический институт, кандидат технических наук, доцент кафедры электротехники Архангельского государственного технического университета. Имеет более 40 научных работ в области электроснабжения промышленных предприятий.

**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССОВ ЭЛЕКТРОПОТРЕБЛЕНИЯ ПРИЕМНИКОВ ЛЕСОПИЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА**

На основе применения теории случайных процессов определены вероятностные характеристики групповых графиков активной мощности электроприемников лесопильного производства, рассмотрен пример расчета указанных характеристик.

*Ключевые слова:* мощность, электрическая сеть, лесопильная рама, случайный процесс, математическое ожидание, корреляционная функция.

Наряду с величиной напряжения у электроприемников одним из основных показателей качества электроэнергии является характер изменения этого напряжения во времени в зависимости от изменения нагрузки электрических сетей [5]. Поэтому вопрос о характеристиках процесса электропотребления группой приемников имеет важное практическое значение.

Целью настоящей работы является установление функциональных зависимостей и параметров, характеризующих графики изменения нагрузок электрических сетей лесопильного производства.

В работе [3] было определено, что график изменения суммарной мощности  $P(t)$  группы электроприемников лесопильного производства имеет нерегулярный случайный характер (рис. 1).

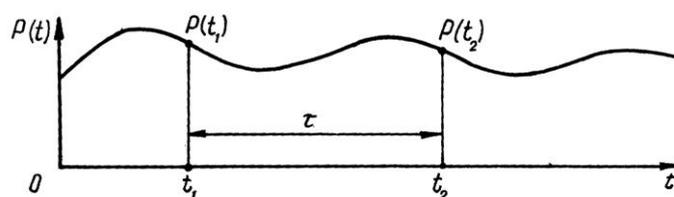


Рис. 1. График изменения суммарной активной мощности

В связи с этим утверждение, что зависимость мощности от времени  $P = P(t)$  есть случайная функция (случайный процесс), имеет следующий смысл:

а) для каждого фиксированного момента времени  $t = t_1$  возможное значение мощности является случайной величиной  $P(t_1)$ ;

б) случайная величина  $P(t_1)$ , в которую обращается случайный процесс при  $t = t_1$ , называется сечением случайного процесса, соответствующим данному значению аргумента  $t$ ;

в) любая неслучайная функция времени  $p(t)$ , в которую превращается случайный процесс  $P(t)$  в результате опыта за некоторый интервал времени, представляет собой реализацию этого случайного процесса.

Рассмотрим случайную величину  $P(t)$  – сечение случайного процесса в момент времени  $t$ . Очевидно, что эта случайная величина обладает законом распределения, который в общем случае зависит от момента времени  $t$ . Обозначим его  $f(P, t)$ . Функция  $f(P, t)$  называется одномерным законом распределения случайного процесса  $P(t)$ . Если для некоторой реализации случайного процесса известно значение нагрузки  $P(t_1)$ , фактически имевшее место для некоторого момента времени  $t = t_1$ , то этим не определено ее значение  $P(t_2)$  для некоторого другого, хотя бы и очень близкого момента времени  $t = t_2$ , но определены вероятности различных возможных значений  $P(t_2)$ . Именно эта корреляционная, т.е. вероятностная связь между значениями нагрузок, возможных в два любых момента времени  $t_1$  и  $t_2 \neq t_1$ , и представляет физическую сущность того факта, когда совокупность случайных величин  $P(t_1), P(t_2), \dots$  для различных моментов времени  $t_1, t_2, \dots$  представляет собой единый, хотя и случайный процесс.

Следует отметить, что изменение во времени суммарной мощности  $P(t)$ , отвечающее установившемуся технологическому процессу лесопиления, относится к классу стационарных случайных процессов, для которых все условия их протекания остаются неизменными во времени. Математически это означает, что для любых двух моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  и при любом сдвиге  $\tau$  во времени корреляционная зависимость между случайными величинами  $P(t_1)$  и  $P(t_2)$  тождественна зависимости между случайными величинами  $P(t_1 + \tau)$  и  $P(t_2 + \tau)$ .

Следует указать, что для любого момента времени  $t = t_1$  среднее из всех возможных значений  $P(t) = P(t_1)$  при стационарном процессе одно и то же, т.е. не зависит от времени. Отсюда следует, что стационарность графика суммарной мощности  $P(t)$  означает достаточно высокую организованность технологического процесса. Действительно, в силу стационарности производственный процесс должен проходить в неизменном темпе от начала до конца рабочей смены.

Из определения случайного процесса вытекает, что изменение суммарной мощности  $P(t)$  во времени может быть охарактеризовано заданием математического ожидания и корреляционной функции. Первая характеристика представляет собой неслучайную функцию  $MP(t) = m_p(t)$ , которая при

любом значении аргумента  $t$  равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса  $P(t)$ . Вторая характеристика есть неслучайная функция  $k_p(t_1, t_2)$  двух аргументов  $t_1$  и  $t_2$ , которая при каждой паре значений этих аргументов равна ковариации соответствующих сечений  $P(t_1)$  и  $P(t_2)$  случайного процесса изменения мощности  $P(t)$ . Тогда, согласно [4],

$$K_p(t_1, t_2) = M \left[ \overset{\circ}{P}(t_1) \cdot \overset{\circ}{P}(t_2) \right] = M [P(t_1) \cdot P(t_2)] - m_p(t_1) m_p(t_2),$$

где  $\overset{\circ}{P}(t) = P(t) - MP(t)$  – центрированный случайный процесс  $P(t)$ .

В настоящей работе рассмотрены вероятностные характеристики процесса электропотребления на примере графика активной мощности  $P(t)$ , формируемого группой электродвигателей главного привода лесопильных рам. Очевидно, что для случаев приемников одинаковой мощности и режима работы можно исследовать график  $X(t)$  количества лесопильных рам, одновременно занятых распиловкой древесины, который в другом масштабе является графиком мощности  $P(t)$  [2].

Как показано в [1], графики  $p(t)$  активной мощности независимо работающих электродвигателей лесопильных рам представляют собой случайную последовательность прямоугольных импульсов различной высоты и длительности, отвечающих периодам распиловки и холостого хода рам. Таким образом, лесопильная рама с точки зрения электропотребления может находиться в двух состояниях  $p_0$  и  $p_1$ . Размеченный граф состояний лесопильной рамы показан на рис. 2.

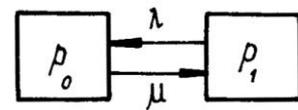


Рис. 2. Граф состояний лесопильной рамы

При этом состояние  $p_0$  означает холостой ход лесопильной рамы, состояние  $p_1$  – лесопильная рама занята распиловкой очередного бревна (бруса). В этом случае параметр  $\lambda$  есть интенсивность потока включений  $P_{\text{вкл}}$  лесопильной рамы в процессе распиловки,  $\mu$  – интенсивность потока освобождений  $P_{\text{осв}}$  [1]. Эти параметры равны среднему значению цикловой  $Q_{\text{ц}}$  и технологической  $Q_{\text{т}}$  производительности, которые могут быть найдены из технологических расчетов [7]. Очевидно, что любая лесопильная рама переходит из одного состояния в другое независимо от того, в каком состоянии находятся лесопильные рамы соседних технологических потоков цеха.

Свяжем с циклическим процессом перехода  $i$ -й лесопильной рамы ( $i = \overline{1, n}$ ) из одного состояния в другое случайную функцию  $Z_i(t)$ , которую определим следующим образом:

$$Z_i(t) = \begin{cases} 1, \text{ а́нèè â ìñáíð} \quad \text{âðáíáíè} \quad t \text{ äáíááý} \quad \text{èáññèèúí} \quad \text{àý ðàìà} \\ \text{íàðíàèðñý} \quad \text{â ññòðíýíèè} \quad \delta_1; \\ 0, \text{ а́нèè â ìñáíð} \quad \text{âðáíáíè} \quad t \text{ äáíááý} \quad \text{èáññèèúí} \quad \text{àý ðàìà} \\ \text{íàðíàèðñý} \quad \text{â ññòðíýíèè} \quad \delta_0. \end{cases}$$

Так как процесс нахождения лесопильной рамы в том или ином состоянии не зависит от того, в каком состоянии находятся другие лесопильные рамы, то очевидно, что все случайные функции  $Z_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) взаимно независимы.

Исследуем случайную функцию  $X(t)$  – число лесопильных рам, находящихся в процессе распиловки бревен в момент времени  $t$ . Очевидно, что

$$X(t) = \sum_{i=1}^n Z_i(t), \quad (1)$$

где  $n$  – число работающих в смене лесопильных рам.

Введем обозначения вероятностей состояний лесопильных рам:

$$e_1(t) = E\{Z_i(t) = 1\}; \quad e_0(t) = E\{Z_i(t) = 0\} = 1 - e_1(t). \quad (2)$$

Эти вероятности не зависят от индекса  $i$ , так как каждая лесопильная рама ведет себя статистически одинаково и независимо от других. Поэтому одномерный закон распределения случайного процесса будет биномиальным с параметрами  $n$ ,  $e_1(t)$ :

$$E\{X(t) = m\} = C_n^m e_1^m(t) (1 - e_1(t))^{n-m}.$$

С учетом принятых обозначений найдем математическое ожидание процесса  $X(t)$ , определяемого равенством (1):

$$m_x(t) = MX(t) = M \left[ \sum_{i=1}^n Z_i(t) \right] = \sum_{i=1}^n MZ_i(t) = ne_1(t). \quad (3)$$

Так как одномерный закон распределения случайного процесса  $X(t)$  является биномиальным, то его дисперсия

$$D_x(t) = DX(t) = ne_1(t)(1 - e_1(t)) = ne_1(t) - ne_1^2(t) = m_x(t) - m_x^2(t)/n. \quad (4)$$

По определению корреляционная функция случайного процесса  $X(t)$

$$K_x(t_1, t_2) = M \left[ \overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2) \right]. \quad (5)$$

Из равенств (1) и (3) следует, что

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = \sum_{i=1}^n Z_i(t) - \sum_{i=1}^n MZ_i(t) = \sum_{i=1}^n \overset{\circ}{Z}_i(t),$$

где  $\overset{\circ}{Z}_i(t) = Z_i(t) - MZ_i(t)$  – центрированная случайная функция  $Z_i(t)$ .

Тогда запишем выражение (5) для корреляционной функции:

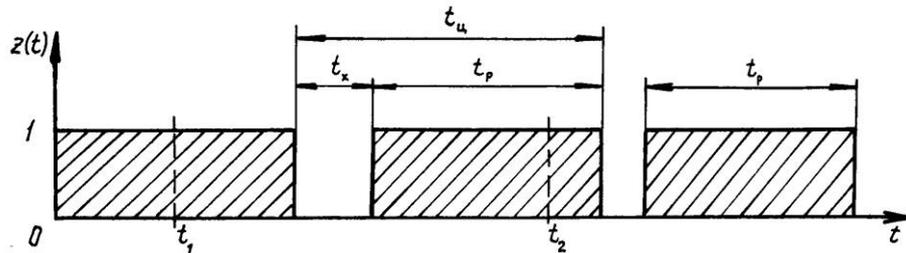


Рис. 3. Оциллограмма работы лесопильной рамы

$$K_x(t_1, t_2) = M \left[ \sum_{i=1}^n \overset{\circ}{Z}_i(t_1) \sum_{i=1}^n \overset{\circ}{Z}_i(t_2) \right]. \quad (6)$$

Введем обозначение для корреляционной функции случайного процесса  $Z_i(t)$ :

$$K_{Z_i}(t_1, t_2) = M \left[ \overset{\circ}{Z}_i(t_1) \overset{\circ}{Z}_i(t_2) \right].$$

Так как все лесопильные рамы работают статистически одинаково, то индекс  $i$  для сокращения записи в дальнейшем можно опустить. В этом случае получим формулу для корреляционной функции

$$K_x(t_1, t_2) = nK_{Z_i}(t_1, t_2) = nK_Z(t_1, t_2). \quad (7)$$

Запишем корреляционную функцию случайного процесса  $Z(t)$ :

$$K_Z(t_1, t_2) = M[Z(t_1)Z(t_2)] - m_2(t_1)m_2(t_2). \quad (8)$$

На рис. 3 показана одна из возможных реализаций  $z(t)$  случайного процесса  $Z(t)$ , которая представляет собой оциллограмму работы лесопильной рамы [6]. На ней отрезки длительностью  $t_p$  означают интервалы времени на осуществление рабочих ходов (время распиловки), а отрезки  $t_x$  – цикловые потери времени (холостой ход).

Ряд распределения сечения случайного процесса  $Z(t)$  имеет вид

$$Z(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e_1(t) & 1 - e_1(t) \end{vmatrix}.$$

Произведение  $Z(t_1)Z(t_2)$  (рис. 3) может принимать только два значения: 1 – если в момент времени  $t_1$  и  $t_2$  значения  $Z(t_1)$  и  $Z(t_2)$  случайной функции равны единице, 0 – в других случаях. Обозначим вероятность того, что произведение  $Z(t_1)Z(t_2)$  будет равно единице через  $e_1(t_1, t_2) = E\{Z(t_1)Z(t_2)=1\}$ .

Тогда ряд распределения случайной величины  $Z(t_1)Z(t_2)$  имеет вид

$$Z(t_1)Z(t_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e_1(t_1, t_2) & 1 - e_1(t_1, t_2) \end{vmatrix}.$$

В этом случае математическое ожидание

$$M[Z(t_1)Z(t_2)] = e_1(t_1, t_2).$$

По теореме умножения вероятностей  $e_1(t_1, t_2)$  можно представить в виде произведения двух вероятностей:

$$e_1(t_1, t_2) = e_1(t)e_{1/1}(t_2, t_1),$$

где  $e_{1/1}(t_2, t_1)$  – условная вероятность того, что в момент времени  $t_2$  случайная функция  $Z(t_2)$  будет равна единице, вычисленная при условии, что в момент времени  $t_1$  случайная функция  $Z(t_1)$  была равна единице, т.е.

$$e_{1/1}(t_2, t_1) = E\{Z(t_2) = 1 / Z(t_1) = 1\}.$$

Для определения вероятности  $e_1(t)$  необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений, соответствующую размеченному графу состояний (рис. 2) при начальном условии  $e_1(t) = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{de_0(t)}{dt} &= \mu e_1(t) - \lambda e_0(t); \\ \frac{de_1(t)}{dt} &= \lambda e_0(t) - \mu e_1(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Решая систему уравнений (9) любым из известных методов [8], получаем

$$e_1(t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t}; \quad t > 0.$$

Для нахождения условной вероятности  $e_{1/1}(t_2, t_1)$  необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (9) в интервале времени от  $t_1$  до  $t_2$  при условии, что в момент времени  $t_1$  лесопильная рама находилась в состоянии  $p_1$ . В результате

$$e_{1/1}(t_2, t_1) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)(t_2 - t_1)}; \quad t_2 > t_1.$$

Тогда, согласно (8), корреляционная функция случайного процесса  $Z(t)$  будет определяться по выражению

$$K_Z(t_1, t_2) = e_1(t)e_{1/1}(t_2, t_1) - e_1(t_1)e_1(t_2) = e_1(t)[e_{1/1}(t_2, t_1) - e_1(t_2)].$$

Используя (7), получаем выражение для корреляционной функции случайного процесса  $X(t)$ :

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= n e_1(t)[e_{1/1}(t_2, t_1) - e_1(t_2)] = \\ &= n \left[ \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t} \right] \frac{\mu}{\mu + \lambda} \left[ e^{-(\mu + \lambda)(t_2 - t_1)} - e^{-(\mu + \lambda)t} \right] \end{aligned}$$

Учитывая, что технологический процесс протекает в неизменном темпе, случайный процесс  $X(t)$  является стационарным. Исходя из этого вероятностные характеристики процесса  $X(t)$  определяем по следующим формулам:

$$m_x = \lim_{t \rightarrow \infty} m_x(t) = \frac{n\lambda}{\lambda + \mu};$$

$$D_x = \lim_{t \rightarrow \infty} D_x(t) = \frac{n\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2}; \quad (10)$$

$$K_x^c(t_1, t_2) = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow \infty \\ t_2 \rightarrow \infty}} K_x(t_1, t_2) = D_x e^{-(\mu+\lambda)(t_2-t_1)} = D_x e^{-\alpha|\tau|} = K_x(\tau),$$

где  $\tau = t_2 - t_1$  – интервал времени;

$\alpha = \mu + \lambda$  – коэффициент затухания корреляционной функции.

#### Пример расчета

Для определения потерь мощности и колебаний напряжения в питающей электрической сети требуется определить вероятностные характеристики изменения суммарного графика активной мощности  $P(t)$ , формируемого асинхронными двигателями восьми лесопильных рам модели 23100-1 четырех поточных линий, установленных в лесопильном цехе. Номинальная мощность всех электродвигателей равна 160 кВт.

В работе [3] были получены следующие значения параметров  $\mu$  и  $\lambda$  потоков  $P_{\text{вкл}}$  и  $P_{\text{осв}}$  лесопильных рам:

$$\mu = 3,17 \cdot 10^{-2} \text{ c}^{-1};$$

$$\lambda = 3,00 \cdot 10^{-2} \text{ c}^{-1}.$$

При этом активная мощность, потребляемая асинхронными двигателями в процессе распиловки древесины, составляет  $P_p = 112$  кВт. Тогда согласно (10), имеем вероятностные характеристики случайного процесса  $X(t)$ :

$$m_x = \frac{n\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{8 \cdot 3,00 \cdot 10^{-2}}{(3,00 + 3,17)10^{-2}} = 3,90 \text{ ;}$$

$$D_x = \frac{n\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} = \frac{8 \cdot 3,00 \cdot 10^{-2} \cdot 3,17 \cdot 10^{-2}}{(3,00 + 3,17)^2 10^{-4}} = 2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = 1,41 \text{ ;}$$

$$K_x(\tau) = D_x e^{-(\mu+\lambda)\tau} = 2e^{-0,0617\tau}; \quad \tau > 0.$$

Аналогичные характеристики для случайного процесса  $P(t)$  изменения активной мощности:

$$P_c = MP = P_p m_x = 112 \cdot 3,9 \approx 437 \text{ ;}$$

$$\sigma_p = P_p \sigma_x = 158 \text{ ;}$$

$$DP = P_p^2 D_x = 112^2 \cdot 2 = 25088 \text{ ;}$$

$$V_p = \frac{\sigma_p}{MP} 100 = \frac{158}{437} 100 = 36 \text{ %};$$

$$K_p(\tau) = DP e^{-\alpha\tau} = 25088 e^{-0,0617\tau}; \quad \tau > 0.$$

Полученное значение коэффициента вариации  $V_p$  свидетельствует о высокой степени неравномерности графика активной мощности  $P(t)$ . Степень неравномерности графика можно характеризовать коэффициентом формы

$$K_\delta = \sqrt{1 + \frac{DP}{P_c^2}} = \sqrt{1 + \frac{25088}{437^2}} = 1,06.$$

Постоянная корреляции стационарного процесса определяется по формуле [4]

$$T_{\dot{\epsilon}} = \int_0^{\infty} R_p(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha}; \quad \tau > 0,$$

где  $R_p(\tau) = e^{-\alpha\tau}$  – нормированная корреляционная функция.

В нашем случае имеем

$$T_{\dot{\epsilon}} = \frac{1}{\mu + \lambda} = \frac{1}{(3 + 3,17)10^{-2}} = 16 \text{ н.}$$

#### Выводы

1. Установлено, что процесс электропотребления группой приемников лесопильного производства является стационарным случайным процессом.
2. Показано, что одномерный закон распределения случайного процесса изменения нагрузок электрической сети является биномиальным.
3. Получены аналитические зависимости, характеризующие вероятностное распределение длительности интервалов времени, затрачиваемого лесопильными рамами на осуществление распиловки бревен и цикловые потери.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеев С.П. Анализ электропотребления рамных лесопильных потоков // Совершенствование электрических систем и технологического оборудования: Сб. науч. тр. / АГТУ. – 2002.
2. Агеев С.П. Моделирование групповых графиков нагрузки электрических сетей лесопильного производства // Лесн. журн. – 2002. – № 2. – С. 121–127. – (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Агеев С.П. Расчет параметров нагрузки электрических сетей лесопильного производства // Лесн. журн. – 2001. – № 5-6. – С. 94–106. – (Изв. высш. учеб. заведений).
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Высш. шк., 2000. – 386 с.
5. ГОСТ 13109–67. Нормы качества электроэнергии у ее приемников, присоединенных к электрическим сетям общего назначения. – М.: Изд-во стандартов, 1967.
6. Калитеевский Р.Е. Автоматизация производственных процессов в лесопилении. – М.: Лесн. пром-сть, 1973. – 336 с.

7. *Калитеевский Р.Е.* Технология лесопиления. – М.: Лесн. пром-сть, 1986. – 264 с.

8. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейник. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.

Архангельский государственный  
технический университет

Поступила 20.12.02

*S.P. Ageev*

### **Probability Characteristics of Power Consumption Processes of Saw-mill Receivers**

Probability characteristics for the group curves of electric receivers of active capacity at saw mills are determined based on the use of random processes theory, an example of calculating characteristics specified being provided.

