УДК 624.011.1:620.17

Б.В. Лабудин, Р.П. Матвеев, Р.С. Санжаровский

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ, УСИЛЕННЫХ ТИТАНОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Рассмотрена проблема повышения прочности и устойчивости сжато-изогнутых стержней, усиленных титановыми элементами.

Ключевые слова: прочность и устойчивость стержней, титановые элементы, деревянные конструкции.

Методы расчета узлов и соединений деревянных конструкций, применяемых в строительстве, с использованием строительной механики стержневых систем могут быть применены при их усилении. С целью повышения прочности, жесткости и устойчивости этих конструкций, работающих на сжатие с изгибом, нами были проведены экспериментально-теоретические исследования. Их выполняли на трубчатых образцах и фрагментах из древесины.

В ряде работ, посвященных анизотропным свойствам конструкционных материалов, костный материал как природный композит рассматривается с учетом анизотропии прочностных и упругих свойств [1].

В построение методики расчета составных элементов положены основные гипотезы механики твердых деформируемых тел, гипотезы плоских сечений и ли-
10 неаризации между соответствующими перемещениями и деформациями элементов биомеханической системы [2, 4].

Применение этих гипотез позволяет построить простую и физически ясную математическую модель для расчета устойчивости элементов как при кратковременных, так и при длительных статических или динамических нагрузках с учетом их упругодеформируемого соединения [3, 5].

Примем, что элемент имеет трубчатое или сплошное строение с неизменным по длине сечением, искривлен и внецентренно закреплен. Тогда эти параметры учтем усреднением поперечного сечения, а искривление – введением эксцентриситетов.

Общую длину стержня делим на (m + 1) равных частей длиной s (рис. 1). Уравнение изогнутой оси стержня заменим интерполирующей функцией, которую используем для вычисления кривизны в точках деления. Значения функции в точках деления совпадают с ординатами действительной кривой y_0, y_1, … y_j, y_m, y_{m+1}. Так, с помощью интерполяционной формулы Лагранжа запишем вторые производные по пяти точкам. Они дают приближенные выражения кривизны [5]:

$$\left|\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_j = \frac{l}{24s^2}\left(C_{j-2}y_{j-2} + C_{j-1}y_{j-1} + C_j y_j + C_{j+1}y_{j+1} + C_{j+2}y_{j+2}\right);\ j = 0,..., m+1. \quad (1)$$

Кривизну к выразим также через краевые деформации сечения:

$$\kappa = (\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i})/h, \quad (2)$$

где ε_{1i} и ε_{2i} – краевые деформации;

h – наибольший размер поперечного сечения в плоскости изгиба.

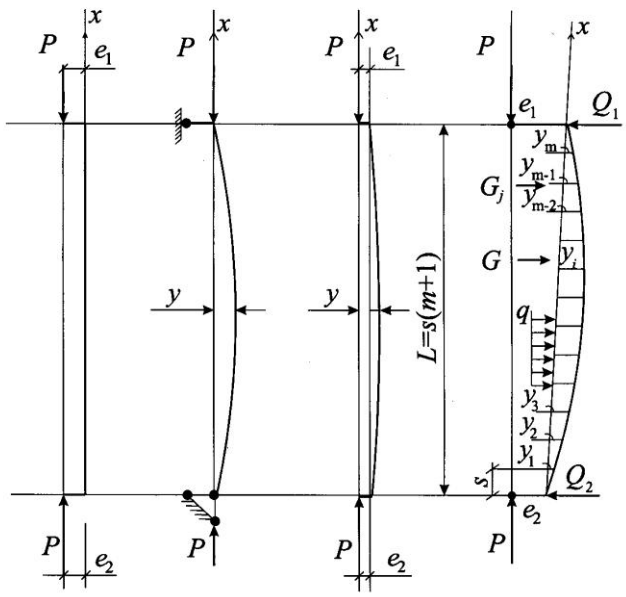

Рис. 1. Выбор расчетной схемы сжато-изогнутого стержня с шарнирным закреплением концов

Подставив правые части (1) и (2), получим:

$$\frac{(\varepsilon_{1i}+\varepsilon_{2i})}{h}=\frac{l}{24s^2}\left(C_{j-2}y_{j-2}+C_{j-1}y_{j-1}+C_jy_j+C_{j+1}y_{j+1}+C_{j+2}y_{j+2}\right). \quad (3)$$

Примем, что распределение напряжений в поперечных сечениях сжато-изогнутого стержня определяется зависимостью σ–ε, соответствующей диаграмме сжатия короткого стержня (образца), а также, что ось нулевых деформаций совмещается с осью нулевых напряжений.

Опытные диаграммы осевого сжатия σ–ε композитного (костного) элемента и титанового аппарата (далее Ti) в общем случае аппроксимизируются полиномами вида

$$\sigma(\varepsilon)=\Sigma a_m^{\varepsilon^{n-m}}. \quad (4)$$

Соответствие выражения (4) эксперименту приводят через метод наименьших квадратов, апробированый в решении многих задач.

Если титан и костный материал имеют явно выраженные площадки текучести, то полином (4) представляется диаграммой σ–ε до начала площадки текучести. Отсюда следуют и другие частные зависимости, например уравнение, приведенное в [2]:

$$\sigma=C\varepsilon^m(1\pm a\varepsilon). \quad (5)$$

Главный вектор и главный момент эпюры нормальных напряжений наиболее загруженного (среднего) сечения определим из известного соотношения внутренних усилий:

$$P_{\text{вн}}=\int_F \sigma dF; \qquad M_{\text{вн}}=\int_F \sigma z dF, \quad (6)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до центра тяжести сечения (рис. 2).

Выделим разрушенный (сломанный) костный элемент, который усилен специальным элементом из титана, установленным с наружной стороны. Трубчатый элемент кости условно заменим эквивалентным сплошным, а титановый элемент – эквивалентной тонкой оболочкой.

В качестве текущей координаты принимем центральный угол α, элементарные площадки выразим через текущую координату:
для композита

$$dF_{к} = 2R^2 \sin^2 \alpha \cdot d\alpha ;$$

для титана

$$dF_{Ti} = 2Rt \cdot d\alpha , \qquad (7)$$

где R – радиус наружной поверхности;
t – толщина оболочки.

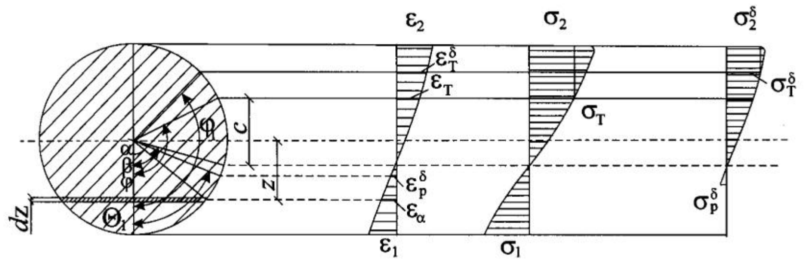

Рис. 2. Эпюры распределения напряжений и деформаций по поперечному сечению комплексного элемента

Рассмотрим оболочку, толщина которой является достаточно малой в сравнении с ее диаметром. По эпюрам, приведенным на рис. 2, запишем выражение для
10* деформации произвольно волокна оболочки из Ti:

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{Ti} \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\beta - \cos\varphi} , \qquad (8)$$

где ε_{Ti} – деформация текучести титана;
β – центральный угол, характеризующий положение нейтральной оси;
φ – центральный угол, характеризующий положение волокна, имеющего деформацию ε_{Ti} в сжатой зоне.

Для случая двусторонней текучести имеем [4]:
главный вектор

$$P_{вн} = 2Rt \sum_{m=0}^{n} a_m \frac{\varepsilon_{Ti}^{n-m}}{(\cos\beta - \cos\varphi)^{n-m}} \int_0^{\varphi} (\cos\beta - \cos\alpha)^{n-m} d\alpha + 2Rt\sigma_{Ti}(\pi - \varphi) +$$
$$+ 2R \sum_{m=0}^{m=i} a_{1m} \frac{\varepsilon_{тк}^{i-m}}{(\cos\beta - \cos\varphi_1)^{i-m}} \int_{\beta}^{\varphi_1} (\cos\beta - \cos\alpha)^{i-m} \sin\alpha \cdot d\alpha + \qquad (9)$$
$$+ 2R^2 \sum_{m=0}^{k} a_{2m} \frac{\varepsilon_{тк}^{k-m}}{(\cos\beta - \cos\varphi_1)^{k-m}} \int_{\theta}^{\beta} (\cos\beta - \cos\alpha)^{k-m} \sin^2\alpha \cdot d\alpha +$$
$$+ \sigma_{тк} R^2 (\pi - \varphi_1 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_1) - 2Rt\sigma_{Ti}\theta;$$

момент поперечной нагрузки

$$M_{\text{вн}} = 2R^2 t \sum_{m=0}^{n} a_m \frac{\varepsilon_{\text{Ti}}^{n-m}}{(\cos\beta - \cos\varphi)^{n-m}} \int_{\theta}^{\varphi} (\cos\beta - \cos\alpha)^{n-m} (-\cos\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ 2R^2 t\sigma_{\text{Ti}} \sin\varphi + 2R^2 \sigma_{\text{Ti}} \sin\theta + 2R^3 \sum_{m=0}^{i} a_{1m} \frac{\varepsilon_{\text{тк}}^{i-m}}{(\cos\beta - \cos\varphi_1)^{i-m}} \times \int_{\beta}^{\varphi_1} (\cos\beta - \cos\alpha)^{i-m} \times \qquad (10)$$

$$\times (-\cos\alpha) \sin^2\alpha \cdot d\alpha + 2R^3 \sum_{m=0}^{k} a_{2m} \frac{\varepsilon_{\text{тк}}^{k-m}}{(\cos\beta - \cos\varphi_1)^{k-m}} - \int_{\theta}^{\beta} (\cos\beta - \cos\alpha)^{k-m} \times$$

$$\times (-\cos\alpha) \sin^2\alpha \cdot d\alpha + \tfrac{2}{3} \sigma_{\text{тк}} R^3 \sin^3\varphi_1,$$

где $\varepsilon_{\text{тк}}$ – деформация текучести композитного материала сжатой зоны;

$\varepsilon_{\text{рк}}$ – деформация предельного растяжения композитного материала;

φ_1 – центральный угол, соответствующий положению волокон с деформацией $\varepsilon_{\text{тк}}$;

θ_1 – центральный угол, соответствующий положению волокон с деформацией $\varepsilon_{\text{рк}}$.

Далее составим уравнения равновесия деформированного состояния части стержня, отделенной любым сечением:

$$P - P_{\text{вн}}^{j}(\beta_j, \varphi_j, \varphi_{1j}, \theta_j, \theta_{1j}) \left[1 + \frac{1}{2}(y'_j)^2\right] + (G_j - Q_{\text{оп}}) y'_j = 0\ ; \qquad (11)$$

$$P(e - y_i) + M_G^{j} - M_{\text{вн}}^{j}(\beta_j, \varphi_j, \varphi_{1j}, \theta_j, \theta_{1j}) = 0, \qquad (12)$$

где G_j и M^{j}_{G} – главные вектор и момент поперечной нагрузки;

e – эксцентриситет приложения силы P, $e = \dfrac{e_1 + e_2}{2}$;

$Q_{\text{оп}}$ – опорная реакция Q_1 или Q_2.

Главный вектор $P_{\text{вн}}^{j}(\beta_j, \varphi_j, \varphi_{1j}, \theta_j, \theta_{1j})$ и момент $M_{\text{вн}}^{j}(\beta_j, \varphi_j, \varphi_{1j}, \theta_j, \theta_{1j})$ найдем из выражений (9), (10).

Центральные углы $\beta_j, \ldots, \theta_{1j}$ с помощью гипотезы плоских сечений выразим через краевые деформации сечений ε_{1j} и ε_{2j}. Производную от прогиба y по координате x запишем с помощью интерполяционного многочлена по пяти точкам:

$$y' = a(s)[a_{j-2} y_{j-2} + a_{j-1} y_{j-1} + a_j y_j + a_{j+1} y_{j+1} + a_{j+2} y_{j+2}]. \qquad (13)$$

Полагаем, что внешняя нагрузка возрастает во времени по известным законам $P(t)$ и $G(t)$, причем, если $t = 0$, то стержень работает упруго. Тогда можно проследить процесс изменения напряженно-деформированного состояния элемента. Дифференцируя его по времени, получаем:

$$\frac{(\dot\varepsilon_{1j} + \dot\varepsilon_{2j})}{h} = \frac{l}{24s^2} (C_{j-2}\dot y_{j-2} + C_{j-1}\dot y_{j-1} + C_j \dot y_j + C_{j+1}\dot y_{j+1} + C_{j+2} y_{j+2});$$

$$\dot{P}-\left(\frac{\partial P^{j}_{\text{вн}}}{\partial \varepsilon_{1j}}\dot{\varepsilon}_{1j}+\frac{\partial P^{j}_{\text{вн}}}{\partial \varepsilon_{2j}}\dot{\varepsilon}_{2j}\right)\left[1+\frac{1}{2}\left(y'_j\right)\right]-P^{j}_{\text{вн}}\dot{y}_j y_j+(\dot{G}_j-Q_{\text{оп}})\dot{y}_j=0\,; \tag{14}$$

$$\dot{y}'_j=a(s)[a_{j-2}\dot{y}_{j-2}+a_{j-1}\dot{y}_{j-1}+a_j\dot{y}_j+a_{j+1}\dot{y}_{j+1}+a_{j+2}\dot{y}_{j+2}]\,,$$

где $$\frac{\partial P^{j}_{\text{вн}}}{\partial \varepsilon_{1j}}=\frac{\partial P^{j}_{\text{вн}}\cdot\partial\beta_j}{\partial\beta_j\cdot\partial\varepsilon_{1j}}+,...,+\frac{\partial P^{j}_{\text{вн}}\cdot\partial\theta_{1j}}{\partial\theta_{1j}\cdot\partial\varepsilon_{1j}}\,.$$

Эта система дифференцируемых уравнений легко сводится к нормальной форме Коши:

$$\dot{y}_j=\frac{\Delta y_j}{\Delta};\quad \dot{\varepsilon}_{1j}=\frac{\Delta\varepsilon_{1j}}{\Delta};\quad \dot{\varepsilon}_{2j}=\frac{\Delta\varepsilon_{2j}}{\Delta}, \tag{15}$$

где Δ, Δy_j, $\Delta\varepsilon_{1j}$, $\Delta\varepsilon_{2j}$ – определители системы.

Для нахождения условия, в котором система приходит в критическое состояние, рассмотрим отклонение стержня от состояния равновесия. Для чего систему уравнений запишем в следующем виде:

$$\frac{(\delta\varepsilon_{1j}+\delta\varepsilon_{2j})}{h}=\frac{l}{24s^2}\left(C_{j-2}\delta y_{j-2}+C_{j-1}\delta y_{j-1}+C_j\delta y_j+C_{j+1}\delta y_{j+1}+C_{j+2}\delta y_{j+2}\right)-$$

$$-\delta P^{j}_{\text{вн}}\left[1+\frac{1}{2}\left(y'_j\right)^2\right]-P_{\text{вн}}y'_j+(G_j-Q_{\text{оп}})\delta\dot{y}'_j=0;$$

$$P\delta y_j-\delta M^{j}_{\text{вн}}=0 \tag{16}$$

$$\delta y'=a(s)[a_{j-2}\delta y_{j-2}+a_{j-1}\delta y_{j-1}+a_j\delta y_j+a_{j+1}\delta y_{j+1}+a_{j+2}\delta y_{j+2}]\,,$$

где $$\frac{\partial P^{j}_{\text{вн}}}{\partial \varepsilon_{1j}}\delta\varepsilon_{1j}+\frac{\partial P^{j}_{\text{вн}}}{\partial \varepsilon_{2j}}\delta\varepsilon_{2j}=\delta P^{j}_{\text{вн}};$$

$$\frac{\partial P^{j}_{\text{вн}}}{\partial \varepsilon_{1j}}=\frac{\partial P^{j}_{\text{вн}}\cdot\partial\beta_j}{\partial\beta_j\cdot\partial\varepsilon_{1j}}+\ ,...,\ +\frac{\partial P^{j}_{\text{вн}}\cdot\partial\theta_{1j}}{\partial\theta_{1j}\cdot\partial\varepsilon_{1j}}\,.$$

Далее определитель системы уравнений (16) необходимо приравнять к 0, чтобы получить критическое состояние конструкции. Рассмотренный метод решения задачи упругопластической устойчивости и запись (15) в форме Коши удобна для численной реализации с использованием стандартных программ ЭВМ.

Численные эксперименты показали, что решение задачи Коши для системы (15) с одновременным вычислением определителя системы (16) намного эффективнее задачи с вычислением системы нелинейных алгебраических уравнений так как итерационный процесс расходится вблизи критического состояния.

Предложенный метод удобен для исследования закритического поведения сжатых стержней в упругопластической стадии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашкенази, Е.К.* Анизотропия древесины и древесных материалов [Текст] / Е.К. Ашкенази. – М.: Лесн. пром-сть, 1978. – 224 с.

2. *Лукаш, П.А* Основы нелинейной строительной механики [Текст] / П.А.Лукаш. – М., 1978. – 208 с.

3. *Качанов, Л.М.* Основы теории пластичности [Текст] / Л.М. Качанов. – М., 1956. – 324 с.

4. *Работнов, Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела [Текст] / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.

5. *Санжаровский, Р.С.* Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести [Текст] / Р.С. Санжаровский. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 280 с.

Архангельский государственный
технический университет

Северный государственный
медицинский университет

С.-Петербургской государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила 12.05.06

B.V. Labudin, R.P. Matveev, R.S. Sanzharovsky

Stability of Close-bent Rods Reinforced by Titanic Elements

The problem of enhancing strength and stability of close-bent rods reinforced by titanic elements is considered.