



МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДРЕВЕСИНЫ  
И ДРЕВЕСИНОВЕДЕНИЕ

УДК 674.08

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ  
ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ДРЕВЕСНЫХ ГРАНУЛ**

© *О.Д. Мюллер, канд. техн. наук, доц.*

*В.И. Мелехов, д-р техн. наук, проф.*

*В.К. Любов, д-р техн. наук, проф.*

*Т.В. Тюрикова, асп.*

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова,  
наб. Северной Двины, 17, г. Архангельск, Россия, 163002; e-mail: oscar@mail.ru

Производство биотоплива из отходов переработки древесины за последние годы приобретает все больший размах. Несмотря на расширение производства древесных гранул, остаются нерешенными вопросы о влиянии отдельных параметров процесса прессования древесных гранул на их качество. Одним из основных параметров, определяющих качество древесных гранул, является давление прессования. Имеющиеся теоретические модели процессов гранулирования показывают, что развиваемое давление прессования является экспоненциальной зависимостью от относительной длины фильеры в матрице. Однако проведенные экспериментальные исследования показали, что эта зависимость носит не экспоненциальную, а линейную зависимость от относительной длины фильеры. Целью настоящей работы была разработка такой математической модели прессования древесной гранулы в цилиндрических фильерах матрицы, которая бы соответствовала экспериментальным исследованиям. Были проанализированы все этапы физического процесса прессования. На основании этого анализа было выявлено, что в процессе прессования древесная шихта претерпевает упругие и пластические деформации. Исходя из этого при разработке новой математической модели процесса прессования древесных гранул за основу была принята теория упруго-пластического деформирования сплошных тел. На базе этой теории рассмотрены два этапа прессования древесной гранулы – выдавливание гранулы через коническое отверстие в цилиндрический канал матрицы и ее движение по цилиндрическому каналу матрицы. Выполненные математические исследования позволили получить зависимость перепада давления по длине гранулы в коническом и цилиндрическом каналах фильеры матрицы и на протяжении всей фильеры в целом. Полученная новая математическая модель процесса прессования древесных гранул показала, что перепад давления в каналах матрицы прямо пропорционален их относительной длине, что полностью соответствует экспериментальным данным.

*Ключевые слова:* древесные отходы, опилки, древесная шихта, пресс-гранулятор, матрица, фильера, древесные топливные гранулы, пеллеты, биотопливо, давление.

Производство биотоплива из отходов переработки древесины в последние годы приобретает все больший размах. В настоящее время в России уже действуют более 100 заводов по производству древесных топливных гранул, выпускающих около 900 тыс. т древесных топливных гранул (пеллет) в год. При этом около 260 тыс. т произведенных гранул потребляется на внутреннем рынке, остальное количество экспортируется в страны Западной Европы.

Несмотря на все расширяющееся производство древесных гранул, остается нерешенным вопрос о влиянии отдельных параметров процесса прессования древесных гранул на их качество. Информация о теоретических исследованиях процесса прессования древесной шихты весьма ограничена, а разработанные при этом математические модели прессования не всегда соответствуют экспериментальным данным. Например, в работе [1] получена зависимость распределения давления по длине фильеры матрицы, которая имеет экспоненциальный характер от относительной длины цилиндрического канала матрицы:

$$p_3 = p_0 \exp \left( 2f\xi \operatorname{ctg} \alpha \ln \left( 1 - 2 \sin \alpha \frac{\ell_2}{\ell_1} \right) - 4f\xi \left( \frac{\ell_1}{d_1} + \frac{\ell_3}{d_2} \right) \right), \quad (1)$$

где  $p_0$  – относительное противодавление;

$f$  – коэффициент трения древесной гранулы о стенки канала матрицы;

$\xi$  – коэффициент бокового давления;

$\alpha$  – угол раскрытия конического участка фильеры матрицы;

$\ell_1$  и  $\ell_3$  – длина цилиндрического участка фильеры матрицы до и после конического участка;

$\ell_2$  – длина конического участка фильеры матрицы;

$d_1$  и  $d_3$  – диаметры цилиндрических участков фильеры матрицы.

В основу данной математической модели были положены условия равновесия выделенного элемента древесной гранулы в канале матрицы под действием сил трения и давления.

Проведенные в Северном (Арктическом) федеральном университете экспериментальные исследования по определению давления выталкивания спрессованной гранулы из цилиндрического канала матрицы показали [2], что распределение носит не экспоненциальный, а линейный характер (рис. 1).

Целью настоящего исследования является разработка математической модели процесса формирования древесных гранул, учитывающей результаты экспериментальных исследований.

Для этого проведены измерения изготовленных древесных гранул [2], анализ результатов которых показал, что наружный диаметр готовых гранул всегда больше диаметра внутреннего канала матрицы.

На основании полученных результатов можно утверждать, что исходная древесная шихта при прессовании древесной гранулы претерпевает упруго-пластические деформации, следовательно, в основу математической модели

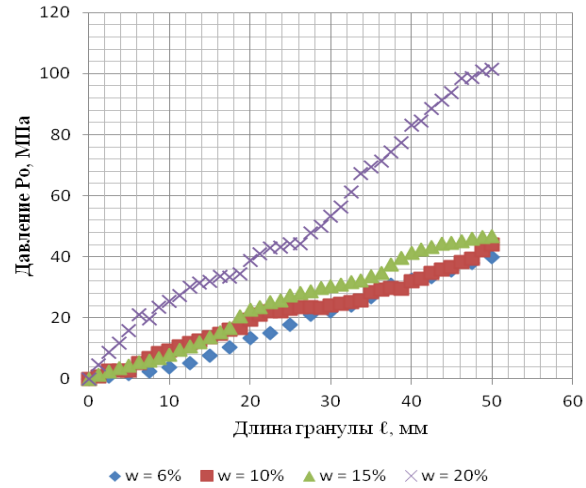
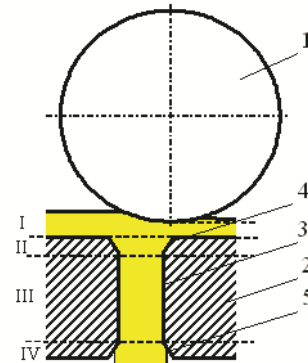


Рис. 1. Зависимость давления выталкивания  $p_o$  гранулы из сосновой шихты (исходная фракция размером  $\delta \leq 1$  мм) различной влажности  $w$

процесса прессования древесных гранул должна быть положена теория упруго-пластического деформирования.

Для разработки математической модели поделим технологический процесс формирования гранулы на четыре зоны (рис. 2).

Рис. 2. Процесс формирования древесной гранулы (I-IV – зоны): 1 – прессовочный ролик; 2 – матрица; 3 – цилиндрический канал фильеры матрицы; 4 – входной конический канал фильеры матрицы; 5 – выходной конический канал фильеры матрицы



В зоне I происходит уплотнение поступившей древесной шихты. На поверхности матрицы образуется слой спрессованной шихты в виде тонкостенного цилиндра (для прессов с цилиндрической матрицей) или плоского диска (для прессов с плоской матрицей). Часть этого слоя при прохождении ролика над входным отверстием фильеры матрицы выдавливается через входной конический канал в калибровочный цилиндрический канал фильеры матрицы. Удаленное количество спрессованной древесной шихты восполняется за счет

прессования поступившей свежей порции древесной шихты. В этой зоне давление прессовочного ролика достигает значения, достаточного для проталкивания спрессованной древесной массы через коническую фаску и калибровочный цилиндрический канал матрицы. Древесная шихта пластически деформируется до максимальной для этого давления плотности. После прохождения ролика оставшаяся часть спрессованной шихты упруго расширяется.

В зоне II (в конической фаске цилиндрического отверстия матрицы) формируется цилиндрическая гранула и происходит истечение спрессованной древесной шихты в цилиндрический канал матрицы. Давление в этой области меньше давления прессования под роликом, вследствие чего находящийся здесь объем спрессованной древесной шихты подвергается упругопластическим деформациям без изменения ее плотности. В этой зоне за счет пластических деформаций спрессованная древесная шихта переходит от формы усеченного конуса к форме цилиндра.

Зона III представляет собой цилиндрический канал матрицы, в котором стабилизируется и закрепляется цилиндрическая форма древесной гранулы, а спрессованная древесная шихта испытывает только упругие деформации. Протяженность цилиндрического канала матрицы во многом определяет давление прессования (давление выталкивания)  $p_0$  и, следовательно, плотность спрессованной древесной гранулы.

Зона IV – это зона выхода спрессованной гранулы из цилиндрического канала матрицы. Так как спрессованная древесная цилиндрическая гранула находится под действием давления упругих деформаций, то в момент выхода древесной гранулы из цилиндрического канала матрицы боковое давление со стороны матрицы на нее снижается до атмосферного, происходит увеличение наружного диаметра древесной гранулы на величину упругих деформаций. Резкое увеличение наружного диаметра гранулы может привести не только к образованию трещин, но и даже к разрушению гранулы. Во избежание этого на выходе из цилиндрического канала матрицы выполнен выходной конический канал (5), обеспечивающий плавное снижение упругих деформаций по мере продвижения гранулы.

Из сказанного выше следует, что давления прессование  $p_0$  определяется перепадом давлений на входном коническом и цилиндрическом участках фильеры матрицы. Так как основными процессами формирования древесной гранулы являются упругопластические деформации, то для определения перепада давлений на указанных участках воспользуемся основными положениями теории упругих и пластических деформаций [3].

#### ***Определение перепада давления в коническом канале матрицы***

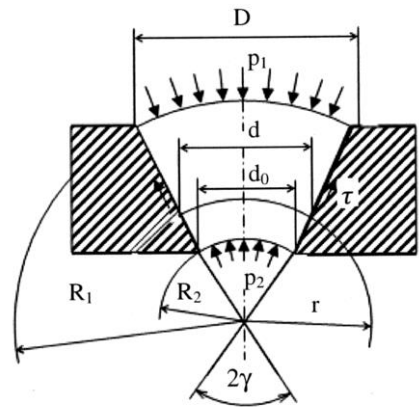
На рис. 3 представлена расчетная схема для определения усилий при проталкивании древесной шихты через конический канал в цилиндрический канал матрицы. Процесс выдавливания древесной шихты происходит в обла-

сти пластических деформаций, при этом соблюдаются условия постоянства объема.

Учитывая тот факт, что канал представляет собой усеченный конус, за расчетную принята сферическая система координат  $r, \theta, \varphi$ .

За верхнюю границу объемно-пластической области примем часть поверхности сферы радиусом  $R_1$  с углом при вершине конуса  $2\gamma$ , опирающуюся на входное отверстие конической фаски диаметром  $D$ , за нижнюю – часть поверхности сферы радиусом  $R_2$  с углом при вершине конуса  $2\gamma$ , опирающуюся на выходное отверстие конического канала диаметром  $d_0$ . Боковая поверхность объемно-пластической области образуется конической поверхностью канала.

Рис. 3. Расчетная схема для конического канала матрицы:  $D$  – диаметр сечения конического канала на входе;  $d_0$  – диаметр сечения конического канала на выходе;  $d$  – диаметр текущего сечения конического канала на радиусе  $r$ ;  $R_1$  – радиус телесного угла, опирающегося на дугу диаметром  $D$ ;  $R_2$  – радиус телесного угла, опирающегося на дугу диаметром  $d_0$ ;  $2\gamma$  – угол при вершине конического канала;  $p_1$  – давление на входе в конический канал;  $p_2$  – давление на выходе из конического канала



Давление выталкивания  $p_1$  во входном сечении выделенного элемента определим на основании энергетического баланса сил, действующих на данный элемент.

Выберем промежуток времени  $\Delta t$ , за который давление  $p_1$  совершит работу выталкивания  $A_{\text{выт}}$ . Эта работа будет затрачена на совершение работы сил давления на выходе из конического канала  $A_{\text{вых}}$ , работу сил трения о боковую поверхность  $A_{\text{тр}}$  и работу пластической деформации древесной шихты в коническом канале  $A_{\text{пл}}$ . Запишем уравнение энергетического баланса для выделенного элемента:

$$A_{\text{пл}} + A_{\text{вых}} + A_{\text{тр}} = 0. \quad (2)$$

Разделив правую и левую части уравнения (2) на время  $\Delta t$ , получим уравнение баланса мощностей для выделенного элемента, которое и будет основным при определении давления на входе в конический участок  $p_1$ :

$$N_{\text{выт}} + N_{\text{пл}} + N_{\text{вых}} + N_{\text{тр}} = 0. \quad (3)$$

Определение мощности для пластического деформирования выделенного элемента

Уравнения равновесия элементарного объема в сферических координатах:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) + \tau_{r\varphi} \operatorname{ctg} \varphi] = 0; \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{\theta r} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \varphi] = 0; \\ \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{\varphi r} - (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \varphi] = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_\varphi$  – главные напряжения, действующие в направлении осей  $r$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ ;  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{r\varphi}$  и  $\tau_{\theta\varphi}$  – касательные напряжения в плоскостях, нормальных к осям  $r$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ .

Уравнения связи между скоростями течения и скоростями деформаций в сферических координатах:

$$\begin{cases} \xi_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \\ \xi_\theta = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \varphi}{r} + \frac{v_r}{r}; \\ \xi_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}; \\ \eta_{r\theta} = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}; \\ \eta_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta r}}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \varphi}{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}; \\ \eta_{\varphi r} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $\xi_r$ ,  $\xi_\theta$  и  $\xi_\varphi$  – скорости относительных деформаций, действующие в направлении осей  $r$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ ;  $\eta_{r\theta}$ ,  $\eta_{r\varphi}$  и  $\eta_{\theta\varphi}$  – скорости относительных угловых деформаций в плоскостях, нормальных к осям  $r$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ ;  $v_\varphi$ ,  $v_\theta$  и  $v_r$  – скорости течения элементарного объема в направлении осей  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ .

Запишем условие постоянства объема (условие несжимаемости):

$$\xi_r + \xi_\theta + \xi_\varphi = 0. \quad (6)$$

Полагая, что движение древесной шихты через конический канал осесимметричное, в силу симметрии потока получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0; \quad v_\theta = 0; \quad v_\varphi = 0. \quad (7)$$

С учетом (7) системы уравнений (4) и (5) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) + \tau_{r\varphi} \operatorname{ctg}\varphi] = 0; \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} [3\tau_{\theta r} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg}\varphi] = 0; \\ \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} [3\tau_{\varphi r} - (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg}\varphi] = 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \xi_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \\ \xi_\theta = \xi_\varphi = \frac{v_r}{r}; \\ \eta_{r\theta} = \eta_{\theta\varphi} = \eta_{\varphi r} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Определим выражение для скорости движения древесной шихты в коническом канале в радиальном направлении. По условию постоянства объема секундный расход является величиной постоянной в любом радиальном сечении конического отверстия.

Пусть радиальная скорость движения шихты на выходе в цилиндрический канал ( $r = R_1$ ) равна  $v_1$ . Площадь поверхности шарового сегмента с углом при вершине  $2\gamma$  и радиусом  $R$  [4]:

$$S = \pi R^2 (2 + \sin^2 \gamma - 2 \cos \gamma). \quad (10)$$

Тогда уравнение постоянства расхода

$$q = v_1 S_1 = v_1 \pi R_1^2 (2 + \sin^2 \gamma - 2 \cos \gamma) = \text{const}. \quad (11)$$

Для произвольного сечения на радиусе  $r$  уравнение (11) примет следующий вид:

$$q = v_1 \pi R_1^2 (2 + \sin^2 \gamma - 2 \cos \gamma) = v_r \pi r^2 (2 + \sin^2 \gamma - 2 \cos \gamma). \quad (12)$$

Отсюда определим радиальную скорость (знак «минус» учитывает встречное движение по оси  $r$ ):

$$v_r = -v_1 \frac{R_1^2}{r^2}. \quad (13)$$

После подстановки (13) в (9) и преобразований получим

$$\begin{cases} \xi_r = 2v_1 \frac{R_1^2}{r^3} \\ \xi_\theta = -v_1 \frac{R_1^2}{r^3}; \\ \xi_\varphi = -v_1 \frac{R_1^2}{r^3}. \end{cases} \quad (14)$$

Следовательно, условие несжимаемости (6) выполняется.

Дальнейший расчет пластической деформации ведем методом энергетического баланса. С одной стороны, приложенные к выделенному объему внешние силы совершают работу  $A_{\text{выт}}$  по выталкиванию его через коническую фаску в цилиндрический канал, с другой – работу его пластического деформирования  $A_{\text{пл}}$  от формы усеченного конуса до формы цилиндра.

Для определения работы пластического деформирования на радиусе  $r$  выделим элементарный элемент сферической формы с углом при вершине  $2\gamma$  и толщиной  $dr$ . Элементарный объем выделенного элемента с точностью до бесконечно малых величин

$$dV = \pi r^2 (2 + \sin^2 \gamma - 2 \cos \gamma) dr. \quad (15)$$

Элементарная мощность пластической деформации на выделенном элементе определяется как

$$N_{\text{пл}} = \sigma_\tau \xi_i dV, \quad (16)$$

где  $\sigma_\tau$  – среднее по объему значение напряжения течения спрессованной древесной шихты;

$\xi_i$  – интенсивность скоростей деформации,

$$\xi_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\xi_r - \xi_\theta)^2 + (\xi_\theta - \xi_\varphi)^2 + (\xi_\varphi - \xi_r)^2 + \frac{3}{2}(\eta_{r\theta}^2 + \eta_{\theta\varphi}^2 + \eta_{\varphi r}^2)}. \quad (17)$$

После подстановки (9) и (14) в (17) получим

$$\xi_i = 2v_1 \frac{R_1^2}{r^3}. \quad (18)$$

Работа пластической деформации

$$N_{\text{пл}} = \int_V dN_{\text{пл}}. \quad (19)$$

После подстановки (15), (16) и (18) в (19) будем иметь

$$N_{\text{пл}} = \int_V 2\sigma_\tau v_1 \frac{R_1^2}{r^3} dV = \int_{R_2}^{R_1} 2\sigma_\tau v_1 \frac{R_1^2}{r} [2(1 - \cos \gamma) + \sin^2 \gamma] dr$$

или

$$N_{\text{пл}} = -2\pi\sigma_\tau v_1 R_1^2 [2(1 - \cos \gamma) + \sin^2 \gamma] \ln \frac{R_1}{R_2}. \quad (20)$$



Определение мощности сил выталкивания во входном сечении конического канала

Мощность сил выталкивания, действующих на выделенную сферическую поверхность во входном сечении, определим по зависимости

$$N_{\text{выт}} = F_1 v_1 = (-p_1) S_1 (-v_1) = \pi p_1 v_1 R_1^2 [2(1 - \cos \gamma) + \sin^2 \gamma]. \quad (21)$$

Определение мощности сил давления на выходе из конического канала

Мощность сил давления в выходном сечении запишем по аналогии с входным сечением:

$$N_{\text{вых}} = F_2 v_2 = p_2 S_2 (-v_2) = -\pi p_2 v_2 R_2^2 [2(1 - \cos \gamma) + \sin^2 \gamma]. \quad (22)$$

Определение мощности сил трения древесной шихты о боковую поверхность конического канала

Элементарную силу трения на боковой поверхности конического отверстия определим по зависимости

$$dF_{\text{тр}} = -\tau dS = -\tau 2\pi r dr. \quad (23)$$

Приняв  $\tau = \beta \sigma_\tau$  (где  $\beta = kv$ ;  $k$  – коэффициент трения;  $v$  – коэффициент Пуассона), получим

$$dF_{\text{тр}} = -\tau dS = -2\pi \beta \sigma_\tau v_r r dr. \quad (24)$$

Мощность сил трения определим путем интегрирования элементарной силы трения  $dF_{\text{тр}}$ :

$$N_{\text{тр}} = \int_S v_r dF_{\text{тр}} = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi \beta \sigma_\tau v_r r dr \quad (25)$$

или с учетом (13):

$$N_{\text{тр}} = \int_{R_2}^{R_1} -2\pi \beta \sigma_\tau v_r r dr = -2\pi \beta \sigma_\tau v_1 R_1^2 \ln \frac{R_1}{R_2}. \quad (26)$$

Определение давления на входе в конический канал

Для определения давления в древесной шихте на входе в конический канал подставим найденные значения мощностей (20) – (22) и (26) в (3):

$$\begin{aligned} \pi p_1 v_1 R_1^2 [2(1 - \cos \gamma) + \sin^2 \gamma] - 2\pi \sigma_\tau v_1 R_1^2 [2(1 - \cos \gamma) + \sin^2 \gamma] \ln \frac{R_1}{R_2} - \\ - \pi p_2 v_2 R_2^2 [2(1 - \cos \gamma) + \sin^2 \gamma] - 2\pi \beta \sigma_\tau v_1 R_1^2 \ln \frac{R_1}{R_2} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Отсюда

$$p_1 = p_2 \frac{v_2 R_2^2}{v_1 R_1^2} + 2 \left( 1 + \frac{\beta}{2(1 - \cos \gamma) + \sin^2 \gamma} \right) \sigma_\tau \ln \frac{R_1}{R_2}. \quad (28)$$

По уравнению неразрывности (11) имеем  $v_1 R_1^2 = v_2 R_2^2$ , тогда

$$p_1 = p_2 + 2 \left( 1 + \frac{\beta}{2(1 - \cos \gamma) + \sin^2 \gamma} \right) \sigma_\tau \ln \frac{R_1}{R_2}. \quad (29)$$

При этом

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{D}{d_0}. \quad (30)$$

После подстановки (30) в (29) и преобразований получим уравнение для расчета перепада давления в коническом канале матрицы:

$$\Delta p_\kappa = p_1 - p_2 = 2 \left( 1 + \frac{\beta}{2(1 - \cos \gamma) + \sin^2 \gamma} \right) \sigma_\tau \ln \frac{D}{d_0}. \quad (31)$$

#### **Расчет цилиндрического канала матрицы**

При движении по цилиндрическому каналу спрессованная древесная гранула имеет форму цилиндра и практически не изменяется. Таким образом, на этом этапе прессования древесной гранулы отсутствуют пластические деформации. В то же время древесная гранула после выхода из конического канала и входа в цилиндрический канал находится в упругодеформированном состоянии (в состоянии «натяга»). Диаметр упругодеформированной гранулы равен диаметру цилиндрического канала  $d_0$  (рис. 4). После выхода из цилиндрического канала за счет упругого расширения диаметр гранулы увеличивается до  $D_{гр}$ .

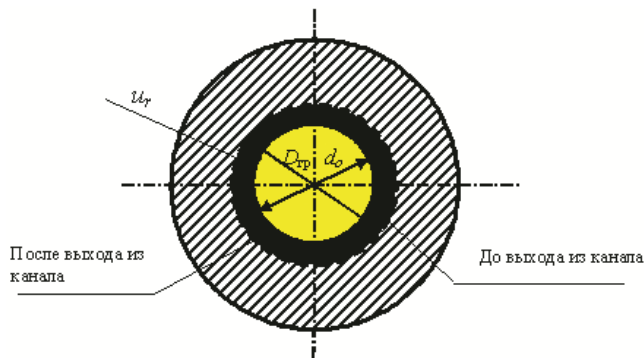
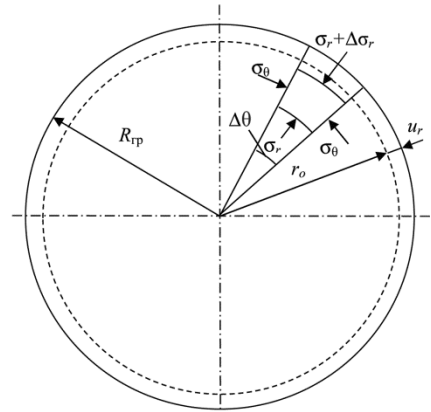


Рис. 4. Схема упругодеформированного состояния гранулы в матрице ( $d_0$  – диаметр древесной гранулы в цилиндрической фильере матрицы;  $D_{гр}$  – диаметр древесной гранулы после выхода из цилиндрической фильеры матрицы;  $u_r$  – смещение конца радиусной цилиндрической поверхности древесной гранулы после выхода из канала фильеры матрицы ( $u_r = 0,5(D_{гр} - d_0)$ ))

Расчетная схема для определения упругодеформированного состояния гранулы представлена на рис. 5. Выберем цилиндрическую систему координат  $r, \theta$  и  $z$ .

Рис. 5. Расчетная схема упругодеформированного состояния гранулы в цилиндрическом канале ( $\sigma_r$  – нормальное напряжение вдоль оси  $r$ ;  $\sigma_\theta$  – нормальное напряжение вдоль оси  $\theta$ ;  $\Delta\theta$  – центральный угол выделенного элемента;  $r_0$  – радиус древесной гранулы в фильере;  $R_{гр}$  – радиус древесной гранулы после выхода из фильеры;  $u_r$  – смещение конца радиуса наружной поверхности древесной гранулы после выхода из канала фильеры матрицы)



Выделим элементарный объем гранулы и для этого объема запишем основные уравнения теории упругости [5]. Так как древесная гранула имеет форму цилиндра, то в качестве расчетной выберем цилиндрическую систему координат  $r, \theta$  и  $z$ . Исходные уравнения теории упругости в цилиндрической системе координат имеют следующий вид:

$$\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z); \quad (32)$$

уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \Phi_r = 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \Phi_\theta = 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \Phi_z = 0; \end{cases} \quad (33)$$

закон Гука

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_r; \\ \sigma_\theta = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_\theta; \\ \sigma_z = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_z; \\ \tau_{r\theta} = 2\mu \varepsilon_{r\theta}; \\ \tau_{rz} = 2\mu \varepsilon_{rz}; \\ \tau_{\theta z} = 2\mu \varepsilon_{\theta z}, \end{cases} \quad (34)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе,  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ;  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ;  
 $\nu$  – коэффициент Пуассона;  
 $E$  – модуль упругости;

уравнение деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z. \quad (35)$$

Выразим деформации через смещения:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right); \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right); \\ \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \end{cases} \quad (36)$$

Для условий нашей задачи, когда цилиндрическую гранулу можно считать бесконечно длинной, частная производная  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ . Смещения вдоль оси  $z$  равны 0,  $u_z = 0$ , тогда поставленная задача сводится к решению плоской задачи.

Так как гранула в поперечном сечении имеет форму круга, то в силу осевой симметрии выполняются следующие условия:

$$\text{смещения не зависят от полярного угла } \theta, \text{ т. е. } \frac{\partial}{\partial \theta} = 0;$$

тангенциальное смещение  $u_\theta = 0$ .

Из массовых сил на гранулу действуют только силы тяжести, которыми ввиду их малости можно пренебречь, тогда компоненты массовых сил равны 0, т. е.  $\Phi_r, \Phi_\theta$  и  $\Phi_z$ . Системы уравнений (33)–(36) принимают следующий вид: уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0; \end{cases} \quad (37)$$

закон Гука

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_r; \\ \sigma_\theta = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_\theta; \\ \sigma_z = \lambda \varepsilon; \\ \tau_{r\theta} = 0; \\ \tau_{rz} = 0; \\ \tau_{\theta z} = 0; \end{cases} \quad (38)$$

уравнение деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta. \quad (39)$$

Выразим деформации через смещения:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}. \end{cases} \quad (40)$$

После подстановки (40) в (38) и (39) и преобразований получим

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda u_r}{r}; \quad (41)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r}; \quad (42)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda u_r}{r}. \quad (43)$$

Подставив (41) и (42) в (37), получим дифференциальное уравнение равновесия выделенного элемента гранулы:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (44)$$

Для нахождения решения дифференциального уравнения (44) необходимо определиться с начальными и граничными условиями. Так как прессование древесной гранулы идет с некоторыми допущениями фактически непрерывно, то процесс можно считать стационарным. В этом случае для решения поставленной задачи необходимо задаться только граничными условиями. Здесь их два: одно на поверхности цилиндрической оболочки недеформированной гранулы при  $r = R_{rp}$ , другое – на поверхности цилиндрической оболочки гранулы после ее упругой деформации до диаметра цилиндрического канала матрицы при  $r = r_0$ .

Граничные условия:

$$\text{при } r = r_0 = \frac{d_0}{2} \text{ имеем } \sigma_r = -p, \quad (45)$$

$$\text{при } r = R_{rp} = \frac{D_{rp}}{2} \text{ имеем } \sigma_r = 0. \quad (46)$$

Найдем решение дифференциального уравнения (44) в виде

$$u_r = r^n. \quad (47)$$

Дважды продифференцируем:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = nr^{(n-1)}; \quad (48)$$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = (n^2 - n)r^{(n-2)}. \quad (49)$$

После подстановки (48) и (49) в (44) получим

$$(n^2 - n)r^{(n-2)} + \frac{1}{r}nr^{(n-1)} - \frac{r^n}{r^2} = 0 \quad (50)$$

или

$$(n^2 - 1)r^{(n-2)} = 0. \quad (51)$$

Отсюда

$$n^2 - 1 = 0. \quad (52)$$

Решением данного уравнения являются корни  $n_1 = +1$  и  $n_2 = -1$ , а решением дифференциального уравнения (44)

$$u_r = C_1 r + C_2 r^{-1}, \quad (53)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы интегрирования, которые определяются из граничных условий.

Для нахождения констант интегрирования продифференцируем уравнение (53):

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = C_1 - \frac{C_2}{r^2}. \quad (54)$$

Подставляя (53) и (54) в (41) и (42), получим после преобразований:

$$\sigma_r = (2\lambda + 2\mu)C_1 - 2\mu \frac{C_2}{r^2}; \quad (55)$$

$$\sigma_\theta = (2\lambda + 2\mu)C_1 + 2\mu \frac{C_2}{r^2}. \quad (56)$$

Для нахождения констант интегрирования воспользуемся граничными условиями:

из условия (46)

$$(2\lambda + 2\mu)C_1 - 2\mu \frac{C_2}{R_{\text{гп}}^2} = 0, \quad (57)$$

откуда

$$C_1 = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)} \frac{C_2}{R_{\text{гп}}^2}; \quad (58)$$

из граничного условия (45) имеем

$$(2\lambda + 2\mu)C_1 - 2\mu \frac{C_2}{r_0^2} = -p, \quad (59)$$

откуда с учетом (58) после преобразований

$$C_2 = \frac{r_0^2 R_{\text{гп}}^2}{(R_{\text{гп}}^2 - r_0^2)} \frac{p}{2\mu}. \quad (60)$$

После подстановки (60) в (58):

$$C_1 = \frac{r_0^2}{(R_{\text{гп}}^2 - r_0^2)} \frac{p}{2(\lambda + \mu)}. \quad (61)$$

Подставив найденные значения констант интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  в уравнения (55) и (56), получим выражения для определения радиальных и тангенциальных напряжений при упругой деформации круглого длинного стержня:

$$\sigma_r = -p \frac{r_0^2}{(R_{\text{тп}}^2 - r_0^2)} \left( \frac{R_{\text{тп}}^2}{r^2} - 1 \right); \quad (62)$$

$$\sigma_\theta = -p \frac{r_0^2}{(R_{\text{тп}}^2 - r_0^2)} \left( \frac{R_{\text{тп}}^2}{r^2} + 1 \right). \quad (63)$$

Перемещение  $u_r$  после подстановки (60) и (61) в уравнение (53) может быть определено по следующей зависимости:

$$u_r = p \frac{r r_0^2}{2(R_{\text{тп}}^2 - r_0^2)} \left( \frac{1}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\mu} \frac{R_{\text{тп}}^2}{r^2} \right). \quad (64)$$

Выразив коэффициенты Ламе через модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуансона  $\nu$  и подставив в (64), получим

$$u_r = p \frac{(1 + \nu)}{E} \frac{r r_0^2}{(R_{\text{тп}}^2 - r_0^2)} \left( 1 - 2\nu + \frac{R_{\text{тп}}^2}{r^2} \right). \quad (65)$$

Уравнение (65) является основным для экспериментального определения давления  $p$  со стороны древесной гранулы на боковую стенку в цилиндрическом канале матрицы. Положив  $r = r_0$ , преобразуем уравнение (65):

$$u_r = p \frac{(1 + \nu)}{E} \frac{r_0}{\left( \frac{R_{\text{тп}}^2}{r_0^2} - 1 \right)} \left( 1 - 2\nu + \frac{R_{\text{тп}}^2}{r_0^2} \right). \quad (66)$$

Радиальное смещение для гранулы при запрессовке ее в фильеру

$$u_r = R_{\text{тп}} - r_0. \quad (67)$$

После подстановки (67) в (66) получим выражение для определения бокового давления спрессованной гранулы на боковую цилиндрическую стенку фильеры:

$$p_6 = \frac{E}{1 + \nu} \frac{(R_{\text{тп}} - r_0) \left( \frac{R_{\text{тп}}^2}{r_0^2} - 1 \right)}{r_0 \left( 1 - 2\nu + \frac{R_{\text{тп}}^2}{r_0^2} \right)} \quad (68)$$

или через диаметры

$$p_6 = \frac{E}{1 + \nu} \frac{(D_{\text{тр}} - d_0) \left( \frac{D_{\text{тр}}^2}{d_0^2} - 1 \right)}{d_0 \left( 1 - 2\nu + \frac{D_{\text{тр}}^2}{d_0^2} \right)}. \quad (69)$$

Сила трения спрессованной древесной гранулы о цилиндрическую стенку канала матрицы может быть определена как

$$F_{\text{тр}} = \pi d_0 \ell k p_6. \quad (70)$$

Сила выталкивания гранулы из цилиндрического канала матрицы

$$F_{\text{выт}} = \frac{\pi d_0^2}{4} \Delta p_{\text{ц}}, \quad (71)$$

где  $\Delta p_{\text{ц}}$  – перепад давления между входным и выходным сечениями цилиндрической части древесной гранулы.

Приравняв силы трения (70) и выталкивания (71), определим перепад давления на цилиндрической грануле:

$$\Delta p_{\text{ц}} = 4 \frac{k \ell}{d_0} p_6. \quad (72)$$

После подстановки (69) в (72) получим

$$\Delta p_{\text{ц}} = 4 \frac{k \ell}{d_0} \frac{E}{(1 + \nu)} \frac{(D_{\text{тр}} - d_0) \left( \frac{D_{\text{тр}}^2}{d_0^2} - 1 \right)}{d_0 \left( 1 - 2\nu + \frac{D_{\text{тр}}^2}{d_0^2} \right)}. \quad (73)$$

#### **Определение давления прессования**

На выходе из цилиндрического канала матрицы спрессованная древесная гранула находится под атмосферным давлением, которое можно принять за ноль. В этом случае давление прессования, развиваемое прессовочным роликом,

$$p_{\text{рол}} = \Delta p_{\text{к}} + \Delta p_{\text{ц}}. \quad (74)$$

После подстановки в (74) выражений для  $\Delta p_{\text{ц}}$  из (73) и  $\Delta p_{\text{к}}$  из (31) и преобразований получим

$$p_{\text{рол}} = 2 \left( 1 + \frac{\beta}{2(1 - \cos \gamma) + \sin^2 \gamma} \right) \sigma_{\tau} \ln \frac{D}{d_0} + 4 \frac{k \ell}{d_0} \frac{E}{(1 + \nu)} \frac{(D_{\text{тр}} - d_0) \left( \frac{D_{\text{тр}}^2}{d_0^2} - 1 \right)}{d_0 \left( 1 - 2\nu + \frac{D_{\text{тр}}^2}{d_0^2} \right)} \quad (75)$$

или с учетом, что  $\beta = kv$ :



$$p_{\text{пол}} = 2 \left( 1 + \frac{kv}{2(1 - \cos\gamma) + \sin^2\gamma} \right) \sigma_{\tau} \ln \frac{D}{d_0} + 4 \frac{k\ell}{d_0} \frac{E}{(1 + \nu)} \frac{(D_{\text{гр}} - d_0) \left( \frac{D_{\text{гр}}^2}{d_0^2} - 1 \right)}{d_0 \left( 1 - 2\nu + \frac{D_{\text{гр}}^2}{d_0^2} \right)}. \quad (76)$$

Из полученной зависимости следует, что давление, развиваемое роликом для проталкивания спрессованной древесной гранулы, имеет линейный характер. В то же время на давление оказывают влияние такие параметры спрессованной древесной шихты, как модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент трения древесной гранулы о цилиндрические стенки матрицы.

#### Выводы

1. Полученная на основании теории упруго-пластического деформирования математическая модель прессования древесных гранул адекватна результатам экспериментальных исследований.

2. Для практического использования полученной математической модели при расчете технологических процессов и проектировании оборудования для производства древесных гранул необходимы масштабные экспериментальные исследования, чтобы создать базу данных для спрессованной древесной шихты по модулю Юнга, коэффициенту Пуассона и коэффициенту трения древесной гранулы о металл матрицы, а также по влиянию на них фракционного состава древесной шихты и породы древесины, влажности шихты, плотности спрессованных гранул и температуры процесса гранулирования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов А.С. Разработка процесса прессового гранулирования мелкодисперсных сред на примере минеральных порошков и древесных отходов: автореф. ...канд. техн. наук. М., 2012. 25 с.
2. Исследование и разработка методов совершенствования технологического процесса получения гранулированного топлива из древесного сырья как возобновляемого источника энергии: отчет о науч.-исслед. работе по гос. контракту № 14.740.11.0097 от 08 сент. 2010 г. (промежуточный, этап № 4) / САФУ; рук. В.К. Любов. Архангельск, 2012. 150 с.
3. Овчинников А.Г. Основы теории штамповки выдавливанием на прессах. М.: Машиностроение, 1983. 200 с.
4. Бронштейн И.Н., Семедяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1981. 723 с.
5. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. шк., 1982. 264 с.

Поступила 23.01.14

UDS 674.08

### Mathematical Model of Wood Granules Formation

*O.D. Myuller, Candidate of Engineering, Associate Professor*

*V.I. Melekhov, Doctor of Engineering, Professor*

*V.K. Lyubov, Doctor of Engineering, Professor*

*T.V. Tyurikova, Postgraduate Student*

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Naberezhnaya Severnoy Dviny, 17, Arkhangelsk, 163002, Russia; e-mail: ockar@mail.ru

Production of biofuel from waste of processing of wood in recent years gains the increasing scope. Despite all extending production of wood granules, there are unresolved questions of influence of separate parameters of process of wood granules pressing on their quality. One of the key parameters, defining the quality of wood granules pressing pressure is. Available theoretical models of processes of a granulation show that the developed pressure of pressing is exponential dependence on relative length of die hole in a matrix. The conducted pilot researches have shown that this dependence carries not exponential dependence on relative length of die hole, but linear. Development of such mathematical model of a wood granule pressing in cylindrical die holes of a matrix which would correspond to pilot studies, was the purpose of the real work. All stages of physical process of pressing were analyzed. On the basis of this analysis it was revealed that in the course of pressing wood furnace charge undergoes elastic and plastic deformations. Proceeding from it when developing new mathematical model of process of wood granules pressing the theory of elasto-plastic deformation of continuous solid was assumed as a basis. On the basis of this theory two stages of a wood granule pressing – process of expression of a wood granule through a conic opening to the cylindrical canal of a matrix and process of movement of a granule on the cylindrical canal of a matrix are considered. The executed mathematical researches allowed to receive dependence of pressure difference on granule length in conic and cylindrical canals of a die hole in matrix and on all die hole as a whole. The received new mathematical model of process of wood granules pressing has shown that pressure difference in channels of a matrix is directly proportional to their relative length, that completely corresponds to experimental data.

*Keywords:* wood wastes, sawdust, a wood charge, a press-granulator, a matrix, a die hole, wood combustive granules, pellets, biofuel, pressure.

### REFERENCES

1. Bulatov A.S. *Razrabotka protsessa pressovogo granulirovaniya melkodispersnykh sred na primere mineral'nykh poroshkov i drevesnykh otkhodov*: Avtoref.kand. diss. [The Development of the Press-Granulation Process of the Fine-Dispersed Fluid by the Example of the Mineral Powders and the Wood Waste: Cand. Diss. Abs]. 2012. 25 p.

2. Lyubov V.K. *Issledovanie i razrabotka metodov sovershenstvovaniya tekhnologicheskogo protsessa polucheniya granulirovannogo topliva iz drevesnogo syr'ya, kak vozobnovlyаемого istochnika energii* [The Research and the Development of Methods of Improving the Process of Granular Fuel from the Wood as the Renewable Energy Source]. Arkhangelsk, 2012. 150 p.

3. Ovchinnikov A.G. *Osnovy teorii shtampovki vydavlivaniem na pressakh* [The Fundamentals of the Theory of the Extruding Presses]. Moscow, 1983. 200 p.

4. Bronshteyn I.N., Semedyaev K.A. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov* [The Guide of Mathematics for Engineers and Students of Technical Institutes]. Moscow, 1981. 721 p.

5. Samul' V.I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [The Fundamentals of the Elasticity and Plasticity Theory]. Moscow, 1982. 264 p.

Received on January, 23, 2014

---

---