ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 1 ЛЕСНОЙ ЖУРНАЛ 1995

УДК 621.827

Ю. Ф. ЧЕРНЫШЕВ, И. А. ЗЫРЯНОВ

Чернышев Юрий Филиппович родился в 1927 г., окончил в 1951 г. Сибирский технологический институт, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов Красноярского государственного технического университета. Имеет свыше 100 печатных трудов в области исследования напряженно-деформированного состояния анизотропных тел.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДЕРЕВЯННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ВТУЛКИ

Рассмотрена устойчивость решения дифференциальных уравнений для расчета ортотропного цилиндра переменной плотности. Получены пределы изменения коэффициента анизотропии K и характеризующей изменение плотности материала втулки величины ν, при которых формулы напряжений надежны.

The solution stability of a differential equation for the calculation of orthotropic cylinder of variable density has been considered. The coefficient variation limits of anisothropy K and value ν characterizing the density variation of the sleeve material at which the formulas of stresses are reliable have been obtained.

В работе [5] определены температурно-влажностные напряжения в анизотропной деревянной втулке, нагруженной внешним и внутренним давлением. Плотность ее стенок изменяется вдоль радиуса по степенному закону. Так как модуль упругости линейно зависит от плотности, то его изменение вдоль радиуса втулки подчиняется этому же закону. Модуль упругости древесины также зависит от изменения температуры и влажности материала стенок втулки.

Полученное в работе [5] дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\left(1-\frac{r}{E_\Theta}\frac{dE_\Theta}{dr}\right)\frac{d\psi}{dr}+\left(\frac{\mu_{r\Theta}}{E_\Theta}\frac{dE_\Theta}{dr}\frac{1}{r}-\frac{E_\Theta}{E_r}\frac{1}{r^2}\right)\psi=$$

$$=\alpha_\Theta E_\Theta\frac{d\delta T}{dr}+\beta_\Theta E_\Theta\frac{d\delta W}{dr}-\left(\alpha_\Theta-\alpha_r\right)E_\Theta\frac{\delta T}{r}-\left(\beta_\Theta-\beta_r\right)E_\Theta\frac{\delta W}{r}, \qquad (1)$$

где ψ — функция элементарных напряжений;

r — текущий радиус;

E_Θ, E_r — модуль упругости материала стенок втулки при растяжении — сжатии в тангенциальном направлении наружного слоя втулки и слоя с радиусом r;

$\mu_{r\Theta}$ — коэффициент Пуассона;

α_r, α_Θ — коэффициенты линейного расширения в радиальном и тангенциальном направлениях;

β_r, β_Θ — коэффициенты усушки в радиальном и теангенциальном направлениях;

T и W — интервалы изменения температуры и влажности.

Подобное уравнение приведено в [3] для определения напряжений в ортотропном кольце, причем в этом случае модуль упругости — величина, не зависящая от радиуса.

Принимая $E_\Theta = E_{\Theta_1}\rho^{\nu}$; $E_\Theta/E_r = K^2$ и $\mu_{r\Theta} = \mu$, получаем

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}(1-\nu)\frac{d\psi}{dr} - (1-\mu\nu)\frac{K^2}{r^2}\psi = -\frac{D_1}{r}, \tag{2}$$

где r_1 — радиус наружного слоя;

$\rho = r/r_1$ — относительный текущий радиус втулки;

ν — некоторая, соответствующим образом подобранная величина;

K — коэффициент анизотропии материала втулки;

$D_1 = (\beta_\Theta - \beta_r)E_\Theta\delta W + (\alpha_\Theta - \alpha_r)E_\Theta\delta T.$

Такое же дифференциальное уравнение с правой частью, равной нулю, рассмотрено в работе [2].

В результате решения дифференциального уравнения (2) [5] получены шесть формул для определения главных напряжений в тангенциальном и радиальном направлениях ортотропной втулки при изменении ее температуры, влажности, а также при действии только внешнего и внутреннего давлений (температура и влажность материала втулки при этом не меняются).

Одним из основных условий надежности полученных формул является проверка решения дифференциального уравнения на устойчивость. Если для малых изменений параметров решения будут сильно меняться, то формулы считаются ненадежными.

Изучение «особых точек» дифференциальных уравнений, т. е. изучение поведения семейств интегральных кривых в окрестности этих точек составляет один из разделов качественной теории дифференциальных уравнений и играет важную роль в прикладных научных дисциплинах [1].

Преобразуем уравнение (2), перейдя к переменной t. Произведем замену $r = e^t$.

Тогда

$$\frac{dr}{dt} = e^t; \quad \frac{dt}{dr} = e^{-t};$$

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{d\psi}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{d\psi}{dt}e^t;$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dr} = \left(\frac{d^2\psi}{dt^2}e^{-t} - \frac{d\psi}{dt}e^{-t}\right)e^{-t} =$$

$$= \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{d\psi}{dt}\right)e^{-2t}.$$

Подставив значения производных в уравнение (2), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\left(\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{d\psi}{dt}\right)e^{-2t} + (1-\nu)\frac{d\psi}{dt}e^{-2t} - (1-\mu\nu)\times$$

$$\times K^2\psi e^{-2t} = -D_1 e^{-t}.$$

Умножим обе части на e^{2t}:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} - \nu\frac{d\psi}{dt} - (1-\mu\nu)K^2\psi = -D_1 e^t.$$

Отсюда

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \nu\frac{d\psi}{dt} - (1-\mu\nu)K^2\psi = -D_1 e^t. \tag{3}$$

Уравнение (3) является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$\psi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \psi^*,$$

где $$\lambda_{1,2} = \frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\frac{\nu^2}{4} + (1-\mu\nu)K^2} = \frac{\nu \pm \sqrt{\nu^2 + 4K^2(1-\mu\nu)}}{2};$$

$$\psi^* = \frac{D_1}{(1-\mu\nu)K^2 + \nu - 1} e^t.$$

Если обозначить $\nu^2 + 4K^2(1-\mu\nu) = d$, то возможны три случая.

Первый случай, когда $d > 0$, т. е.

$$\nu^2 + 4K^2(1-\mu\nu) > 0.$$

Отсюда

$$\mu\nu < 1 + \frac{\nu^2}{4K^2}.$$

Надо отметить, что этот случай подходит для решения практических задач при определении технологических, температурных и влажностных напряжений и перемещений.

Для втулок, изготовленных из древесины всех пород и предназначенных для подшипников скольжения, произведение $\mu\nu$ почти всегда будет меньше единицы. Правая часть неравенства для любых значений ν и K больше единицы. Корни характеристического уравнения в этом случае действительные. Значит решение уравнения (3) будет иметь вид

$$\psi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{D e^t}{(1-\mu\nu)K^2 + \nu - 1}.$$

Возвращаясь к переменной $e^t = r$, получаем общее решение уравнения (2):

$$\psi = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} + \frac{Dr}{(1-\mu\nu)K^2 + \nu - 1}.$$

Второй случай, когда $d = 0$, т. е.

$$\nu^2 + 4K^2(1-\mu\nu) = 0.$$

Отсюда

$$\mu\nu = 1 + \frac{\nu^2}{4K^2}$$

и корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{\nu}{2}.$$

Общее решение уравнения примет следующий вид:

$$\psi_1 = e^{\frac{\nu}{2}t}; \quad \psi_2 = t\, e^{\frac{\nu}{2}t}.$$

Возвращаясь к переменной $e^t = r$, получаем общее решение уравнения (2):

$$\psi = C_1 r^{\frac{\nu}{2}} + C_2 r^{\frac{\nu}{2}} \ln r + \frac{Dr}{(1-\mu\nu)K^2 + \nu - 1} =$$

$$= (C_1 + C_2 \ln r)\, r^{\frac{\nu}{2}} + \frac{4Dr}{-(\nu - r)^2}.$$

Третий случай, когда $d < 0$, т. е.

$$\nu^2 + 4K^2(1 - \mu\nu) < 0$$

или

$$\mu\nu > 1 + \frac{\nu^2}{4K^2}.$$

В этом случае характеристическое уравнение будет иметь комплексные корни.

Обозначая $\nu^2 + 4K^2(1 - \mu\nu) = -d^2$, получаем

$$\psi_1 = e^{\frac{\nu}{2}t} \cos dt; \quad \psi_2 = e^{\frac{\nu}{2}t} \sin dt.$$

Имеем общее решение уравнения (2):

$$\psi = r^{\frac{\nu}{2}} (C_1 \cos d \ln r + C_2 \sin d \ln r) + \frac{Dr}{(1-\mu\nu)K^2 + \nu - 1}.$$

Таким образом, в двух первых случаях общее решение выражается через степенные функции, а в третьем — через комбинацию степенно-тригонометрических функций с линейной.

Во втором случае условие $\mu\nu = 1 + \frac{\nu^2}{4K^2}$ возможно для втулки, испытывающей только внутреннее давление, но его вероятность близка к нулю.

В третьем случае условие $\mu\nu > 1 + \frac{\nu^2}{4K^2}$ невозможно, так как величины μ и ν меньше единицы (для случая воздействия на втулку только внешнего давления) [4]. Поэтому исследование решения проводили для первого случая, как отвечающего условиям задачи.

Построение графиков функции ψ_2 для значений $0 < K \leqslant 10$ и $-1{,}2 < \nu < 1{,}5$ показало устойчивость решения дифференциального уравнения (1) для первого случая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Математический энциклопедический словарь.— М.: Советская энциклопедия, 1988.— 848 с. [2]. Огарков Б. И., Кац Ю. С. Определение напряжений в анизотропном кольце с модулем упругости, изменяющимся вдоль радиуса // Машиностроение.— 1967.— № 9.— С. 40—46.— (Изв. высш. учеб. заведений). [3]. Огарков Б. И. Температурно-влажностные напряжения в анизотропном кольце с учетом зависимости модуля упругости от температуры и влажности // Машиностроение.— 1966.— № 5.— С. 26—30.— (Изв. высш. учеб. заведений). [4]. Чернышев Ю. Ф., Зырянов И. А. Деревянная толстостенная втулка равного сопротивления внешнему давлению // Лесн. журн.— 1993.— № 1.— С. 84—87.— (Изв. высш. учеб. заведений). [5]. Чернышев Ю. Ф. Напряженное состояние ортотропного цилиндра переменной плотности // Лесн. журн.— 1990.— № 6.— С. 71—75.— (Изв. высш. учеб. заведений).

Поступила 25 июля 1994 г.