

Сергеевичев Владимир Васильевич родился в 1947 г., окончил в 1972 г. Ленинградскую лесотехническую академию, доктор технических наук, заведующий кафедрой теории и механизмов, деталей машин и подъемно-транспортных устройств С.-Петербургской государственной лесотехнической академии. Имеет более 80 печатных трудов в области технологии и механики древесных материалов.  
E-mail: varagalina@yandex.ru



## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПРОКАТКИ ДРЕВЕСНЫХ МАТЕРИАЛОВ В ВАЛКОВЫХ ПРЕССАХ

Приведена математическая модель процесса прокатки древесных материалов в валковых прессах непрерывного действия, которая позволяет определить основные силовые параметры и выполнить анализ напряженного состояния древесных материалов.

*Ключевые слова:* фанерные трубы, напряженное состояние, анализ напряженного состояния, математическая модель.

Цель работы – создание математической модели для проведения исследований и расчетов длинных прокатываемых листов, которая бы адекватно описывала процесс и позволяла определять напряженно-деформационное состояние прокатываемого материала.

При изготовлении плитных и листовых изделий из древесных материалов в прессах непрерывного действия имеется плоская задача для слоя. В декартовой прямоугольной системе координат  $(x, y, z)$  лист занимает область

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < H, \quad -\infty < z < \infty. \quad (1)$$

Предполагается, что все его упругие и прочностные характеристики, а также геометрические, силовые и деформационные условия нагружения не зависят от  $z$ , т. е. рассматривается плоская задача для слоя толщиной  $H$ , или полосы  $(-\infty < x < \infty, 0 < y < H)$ , жестко закрепленной на нижней границе  $y = 0$ . Упругие перемещения по  $x$  и  $y$  обозначим через  $u$  и  $V$ . Исходя из формул Коши, плоские деформации представим в следующем виде:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (2)$$

Природное строение древесины обуславливает ярко выраженную анизотропию рассматриваемого материала. Считая, что волокна и сосуды древесины, располагающиеся в направлении ствола дерева, идут вдоль оси  $OX$ , а деформации, содержащие продольные перемещения  $u$ , будем считать пренебрежительно малыми по сравнению с поперечными деформациями  $\partial V/\partial y$  и углами скоса  $\partial V/\partial x$ . В этом случае обобщенный закон Гука, связывающий деформации с напряжениями, имеет упрощенный вид:

$$\sigma_y = E \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \tau_{xy} = G \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $\sigma_y, \tau_{xy}$  – нормальное и касательное напряжения;

$E$  – модуль Юнга в направлении  $y$ ;

$G$  – модуль сдвига.

В первом приближении модель поперечного сжатия и прокатки древесины будем строить как одномерную модель теории сопротивления материалов, усредняя по оси  $OY$  все механические, прочностные, геометрические параметры полосы, а также граничные условия на торцах прямоугольников и полуполос при решении соответствующих задач для конечных и бесконечных областей [2]. Не меняя обозначений, в дальнейшем будем полагать, что зависимости (2) и (3) связывают усредненные значения величин. При прокатке древесины, когда под давлением вала напряжения  $\sigma_y$  достигают критических значений  $\sigma_c$ , происходит сжатие клеток. Вертикальные стенки клетки частично разрушаются и складываются, горизонтальные – сближаются. В целом материал уплотняется. Таким образом, модуль сдвига уплотнившегося материала  $G_c$

увеличивается в  $1/\theta$  раз, толщина уплотнившегося материала  $h_c$  уменьшается в  $\theta$  раз (где  $\theta$  – коэффициент линейного уплотнения):

$$G_c = \frac{G}{\theta}, \quad h_c = \theta h. \quad (4)$$

С одной стороны, после сжатия клеток и уплотнения древесины в поперечном направлении ее модуль Юнга значительно увеличивается, и деформациями  $\varepsilon_y$  уплотненной древесины можно пренебречь, считая ее несжимаемой. С другой стороны, главный вектор касательных напряжений  $\tau_{xy}$  в сечении  $x = \text{const}$  полосы толщиной  $h$

$$F = \int_0^h \tau_{xy} dy = \int_0^h G \frac{\partial V}{\partial x} dy = hGV', \quad (5)$$

и сохраняет свою величину после уплотнения полосы. Действительно, в силу (4) имеем

$$F_c = \int_0^{h_c} G_c \frac{\partial V}{\partial x} dy = h_c G_c V' = hGV'. \quad (6)$$

Таким образом, если  $H$  – толщина исходной полосы, то, независимо от толщины ее уплотненной части  $h$ , главный вектор  $F$  касательных напряжений  $\tau_{xy}$  в сечении  $x = \text{const}$  выражается формулами

$$F = HG \frac{dV}{dx}; \quad F = \eta W'; \quad \eta = \frac{GH}{2}, \quad (7)$$

где  $W$  – перемещение верхней границы полосы,  $W = 2$ .

Рассмотрим теперь равновесие отрезка полосы шириной  $\Delta x$ , заключенного между сечениями  $x$  и  $x + \Delta x$  (рис. 1). Пусть, кроме ранее введенных уже величин  $F = F(x)$  и  $\sigma_y = \sigma_y(x)$ , на полосу действует вертикальная нагрузка  $q(x)$ .

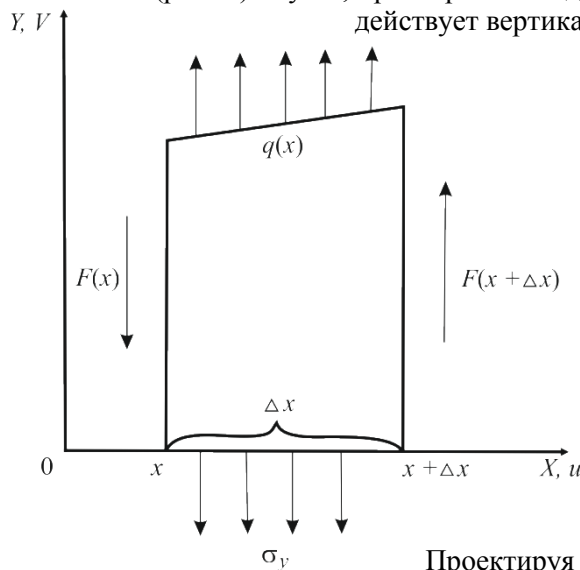


Рис. 1. Схема действия перерезывающих сил и нормальных напряжений

Проектируя на ось  $OY$  все силы, приложенные к прямоугольнику, имеем

$$F(x + \Delta x) - F(x) = (\sigma_y - q(x))\Delta x. \quad (8)$$

Переходим к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$F'(x) = \sigma_y - q(x). \quad (9)$$

Подставляем (7) в левую часть (9) и получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестных  $V$  и  $\sigma_y$ :

$$V'' = \frac{1}{HG}(\sigma_y - q(x)). \quad (10)$$

Однако специфика прокатки делает величину  $\sigma_y(x)$  известной на определенном участке  $x$ . Рассмотрим движение одного из валков во время уплотнения, т. е. при достаточно большой нагрузке. Из общих соображений понятно, что в определенной точке перед валком постоянная до сих пор толщина  $h$  уплотненной другими валками или в другом цикле части полосы начнет при  $q(x) = 0$  монотонно расти и этот процесс закончится под нижней точкой валка. Именно монотонность роста на участке, передняя граница которого неизвестна, позволяет утверждать, что на нем имеется следующее равенство:

$$\sigma_y = -\sigma_c. \quad (11)$$

В дальнейшем эта гипотеза будет доказана. Заметим, что она не всегда была справедливой при  $q(x) \neq 0$  или, например, если бы валок оказался зубчатым, т. е. в этих случаях  $\sigma_y \neq \text{const}$ . По теории упругости указанная монотонность порождается монотонностью убывания при росте  $|x|$  и  $y = \text{const}$  напряжений  $\sigma_y$  подсосредоточенной в точке  $x = 0, y = H$  силой. Она не дает возможности возникнуть напряжениям  $\sigma_y > -\sigma_c$ . Напряжения  $\sigma_y < -\sigma_c$  не могут появиться, поскольку они уплотняли бы новые слои древесины, пока не достигли бы значений  $-\sigma_c$ . Итак, согласно (10), на участке активного уплотнения (при  $q(x) = 0$ ) справедливо уравнение

$$V'' = \frac{\sigma_c}{GH} \quad \text{или} \quad V'' = -\frac{\sigma_c}{\eta}. \quad (12)$$

Как уже отмечалось выше, в период активной прокатки возникает предельное напряжение сжатия  $\sigma_y = -\sigma_c, \sigma_c > 0$ , в этот момент

$$-\sigma_y = E\varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{v_2}{H - \chi}. \quad (13)$$

Из этих равенств следует, что

$$v_2(x) = \frac{-\sigma_c}{E}(H - \chi). \quad (14)$$

Так как полное перемещение  $v$  складывается из  $v_1$  и  $v_2$ :

$$v = v_1(x) + v_2(x); \quad v_1(x) = -\chi(x)(1 - \theta) \quad (15)$$

и 
$$\chi = \frac{h(x)}{\theta}; \quad v_1(x) = h(x)\left(\frac{1}{\theta} - 1\right), \quad (16)$$

то из формул (14)–(16) получаем

$$w(x) = -h(x)\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) - \frac{\sigma_c}{E}\left[H - \frac{h(x)}{\theta}\right], \quad (17)$$

или в другой форме:

$$w(x) = -\alpha h(x) - \beta H. \quad (18)$$

Решив уравнение, можно найти силу  $F(x)$ , по формуле (18) – толщину уплотненной древесины:

$$h(x) = -\frac{1}{\alpha}[w(x) - \beta H], \quad (19)$$

по формулам (14) и (15) – перемещение:

$$v_2(x) = -\frac{\sigma_c}{E}\left[H - \frac{h(x)}{\theta}\right], \quad (20)$$

где  $\alpha = \frac{1}{\theta} - \frac{\sigma_c}{\theta E} - 1; \quad \beta = \frac{\sigma_c}{E}. \quad (21)$

Заметим, что коэффициент  $\alpha$  определяется формулой (8) в первом приближении. Более точно его можно найти непосредственно из опыта, не связывая с  $\theta, \sigma_c$  и  $E$  в отдельности.

Пусть на некотором участке  $x \in (a, b)$  полосы толщина уплотненного слоя постоянна  $h(x) = h = \text{const}$  и напряжения  $\sigma_y > -\sigma_c$  являются допредельными, неразрушающими. При прокатке эти участки располагаются на некотором удалении перед валком и непосредственно за валком, в результате прокатки образуются полосы предшествующими валками и рассматриваемым валком в данном цикле.

Согласно (16)

$$\sigma_y = E\varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{v_2}{H - \frac{h}{\theta}}. \quad (22)$$

Из (13) имеем

$$F = \eta w'; \quad \frac{dF}{dx} = \sigma_y; \quad \eta w'' = \sigma_y. \quad (23)$$

Подставим (22) в (23):

$$\eta w'' = \frac{E v_2}{H - \frac{h}{\theta}}. \quad (24)$$

Так как  $h(x) = \text{const}$  из (4) имеем  $v_1''(x) \equiv 0$ , а из (3) –  $w''(x) = v_2''(x)$ . Следовательно, из (24) получим

$$v_2'' = \frac{E}{\eta(H - \frac{h}{\theta})} v_2 \quad (25)$$

или

$$v_2'' - \gamma^2 v_2 = 0; \quad \gamma = \sqrt{\frac{E}{\eta \left( H - \frac{h}{\theta} \right)}}. \quad (26)$$

Решая это дифференциальное уравнение, можно найти по формулам (11) функции

$$F(x) = \eta v_2'; \quad \sigma_y = \eta \gamma^2 v_2. \quad (27)$$

Общее решение уравнения (26) имеет следующий вид:

$$w = \frac{\sigma_c}{2\eta} x^2 + C_1 x + C_2; \quad x \in X_1; \quad (28)$$

$$v_2 = C_3 e^{\gamma x} + C_4 e^{-\gamma x}; \quad x \in X_2, \quad (29)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – произвольные постоянные;

$X_1$  – множество промежутков активного уплотнения;

$X_2$  – множество промежутков упругой деформации.

Используя формулы (20), (21), (27), запишем другие компоненты решения:

$$F(x) = \eta \left[ -\frac{\sigma_c}{\eta} x + C_1 \right]; \quad (30)$$

$$h(x) = -\frac{1}{\alpha} \left[ -\frac{\sigma_c}{2\eta} x^2 + C_1 x + C_2 + \beta H \right]; \quad (31)$$

$$v_2(x) = -\frac{\sigma_c}{E} \left[ H + \frac{1}{\alpha \theta} \left( -\frac{\sigma_c}{2\eta} x^2 + C_1 x + C_2 + \beta H \right) \right] x \in X_1; \quad (32)$$

$$F(x) = \eta [C_3 \gamma e^{\gamma x} - C_4 \gamma e^{-\gamma x}]; \quad (33)$$

$$\sigma_y(x) = \eta \gamma^2 [C_3 e^{\gamma x} + C_4 e^{-\gamma x}], \quad x \in X_2. \quad (34)$$

Произвольные постоянные  $C_k$  определяются из условий на границах областей  $X_1$  и  $X_2$ , включая бесконечно удаленные точки. На каждом торце прямоугольника  $x = x_0$ , т. е. на краю листа, ставится одно из условий:

$$v_2(x_0) = v_0; \quad F(x_0) = F_0; \quad h(x_0) = h_0 \quad (35)$$

или их комбинация. Если точка  $x_0$  является заданной точкой сопряжения решений на  $X_1$  и  $X_2$ , то граничные условия представляют собой совокупность каких-либо двух из выписанных ниже трех условий:

$$v_2^+(x_0) - v_2^-(x_0) = v_0; \quad (36)$$

$$F^+(x_0) - F^-(x_0) = F_0; \quad (37)$$

$$h^+(x_0) - h^-(x_0) = h_0. \quad (38)$$

Здесь  $f^+(x_0)$  и  $f^-(x_0)$  – предельные значения функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  соответственно справа и слева;

$f_0$  – скачок функции в точке  $x_0$ .

Если точка сопряжения решений  $x_0$  заранее неизвестна и подлежит определению, то в ней должны быть удовлетворены все три условия (36) – (38). Если рассматривается решение в бесконечной или полубесконечной полосе, то, как правило, ставится условие стремления к нулю всех компонент решения при  $x \rightarrow \infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ .

Рассмотрим плоскую задачу упругой деформации бесконечного листа,  $x \in (-\infty, \infty)$ , нагруженного по прямой  $x = 0$  равномерно распределенными силами плотностью  $2F_0$  (рис. 2).

Пусть  $H$  – первоначальная толщина листа. В результате одного или нескольких предшествующих циклов прокатки в нем образовался уплотненный поверхностный слой постоянной толщины  $h$ . В силу зеркальной симметрии задачи относительно сечения  $x = 0$  решение можно искать в правой половине листа  $x \in (0, \infty)$ , приложив на ее торце силу  $F_0$  и потребовав, чтобы на бесконечности решение стремилось к нулю.

Учитывая, что в силу требования  $C_3 = 0$ , из (29) получаем

$$V_2 = C_4 e^{-\gamma x}. \quad (39)$$

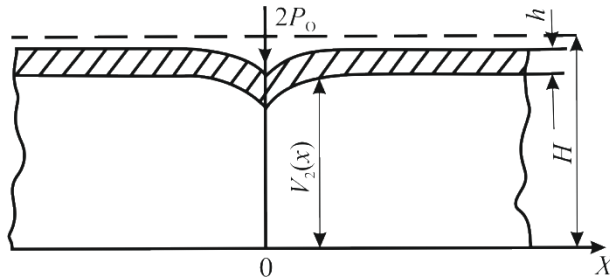


Рис. 2. Упругая деформация бесконечного листа

При  $x = 0$

на основании (33) имеем

$$F_0 = -C_4 \eta \gamma e^{-\gamma x}. \quad (40)$$

Отсюда и из (39), (33) и (34):

$$C_4 = -\frac{F_0}{\eta \gamma}; \quad V_2(x) = -\frac{F_0}{\eta \gamma} e^{-\gamma x}; \quad (41)$$

$$F(x) = F_0 e^{-\gamma x}; \quad \sigma_y^{(x)} = -F_0 \gamma e^{-\gamma x}. \quad (42)$$

Так как функция  $|\sigma_y(x)|$  на всем промежутке  $(0, \infty)$  монотонно убывает, то наибольшее сжимающее напряжение  $\sigma_y^{\max}$  возникает под силой  $F_0$  в точке  $x = 0$ :

$$\sigma_y^{\max} = |\sigma_y(0)| = F_0 \gamma = F_0 \sqrt{\frac{2\theta E}{GH(H\theta - h)}}. \quad (43)$$

В упругой стадии прокатки сжимающие напряжения  $|\sigma_y(x)|$  не могут превышать  $\sigma_c$ . Поэтому приложенная к валку минимальная сила  $F_0^{\min}$ , при которой начинается уплотнение листа, выражается как

$$F_0^{\min} = \sigma_c \sqrt{\frac{GH(H\theta - h)}{2E\theta}}. \quad (44)$$

Как видно из (44), сила  $F_0^{\min}$  пропорциональна  $\sigma_c$  и увеличивается с ростом  $G$  и  $H$ , а также с уменьшением  $E$ , что качественно соответствует опытным данным и легко объясняется с позиции теории упругости [1]. С увеличением  $h$  сила  $F_0^{\min}$  уменьшается. В допредельной упругой стадии первого цикла прокатки, когда  $h = 0$  и уплотненный слой еще отсутствует, формула для определения минимальной силы, приложенной к валку, имеет следующий вид:

$$F_0^{\min} = \sigma_c H \sqrt{\frac{G}{2E}}. \quad (45)$$

Естественно, эта сила не должна зависеть от  $\theta$ , что и отражает формула (45).

Выбранная модель качественно соответствует и другим результатам экспериментов с древесиной. Например, если представить действие сосредоточенной силы, то в опыте под кромкой наблюдается излом перемещений,  $W'(0) > 0$ . Обычная балочная теория изгиба дает  $W'(0) = 0$ , теория упругости –  $W'(0) = \infty$ . Воспользуемся формулой (41):

$$W'(0) = V_2'(0) = \frac{F_0}{\eta} = \frac{2F_0}{GH}. \quad (46)$$

Таким образом, угол излома поверхности древесины под силой конечен, пропорционален действующей силе, обратно пропорционален модулю сдвига и толщине листа или бруса.

Если сила  $F_k$  приложена в точке  $x = t_k$ , то очевидно решение имеет вид:

$$V_{2k}(x) = -\frac{F_k}{\eta \gamma} e^{-\gamma(x-t_k)}. \quad (47)$$

Так как задача линейна, то при действии нескольких сил  $F_k$  решение выражается суперпозицией отдельных решений (47):

$$V_2(x) = -\sum_k \frac{F_k}{\eta\gamma} e^{-\gamma(x-t_k)}. \quad (48)$$

Аналогично представим и другие компоненты решения (41), (42).

Если на отрезке  $x \in (a, b)$  задана распределенная нагрузка плотностью  $r(x)$ , то решение, очевидно, выражается формулой, подобной (48):

$$V_2(x) = -\int_a^b \frac{r(t)}{\eta\gamma} e^{-\gamma(x-t)} dt, \quad (49)$$

где  $x$  не принадлежит отрезку  $(a, b)$ . В случае полиномиальных нагрузок интеграл (49) выражается в элементарных функциях.

Например, при  $r(t) = r = \text{const}$  имеем

$$V_2(x) = -\frac{re^{-\gamma x}}{\eta\gamma^2} (e^{\gamma b} - e^{\gamma a}), \quad x \in (a, b). \quad (50)$$

Все полученные решения можно использовать при исследованиях и расчетах длинных прокатываемых листов, на краях которых напряжения и деформация заведомо малы.

#### Выводы

1. Предложенная математическая модель в виде двух систем дифференциальных уравнений и функциональных зависимостей, построенная на базе уравнений теории упругости с использованием принципа уплотнения древесины при максимально возможных сжимающих напряжениях, адекватно описывает процесс прокатки, что подтверждается экспериментально.

2. Математические модели позволяют решить весь комплекс задач по обоснованию и оптимизации параметров рабочих органов валковых прессов и технологии прокатки, в том числе определить напряженно-деформационное состояние прокатываемого материала.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир. 1975, 872 с.
2. *Нуллер Б.М., Сергеевичев В.В.* К вопросу о моделировании процесса механической прокатки древесных материалов //Изв. СПбГЛТА. 2002. С. 63–66.

Поступила 20.11.06

**V.V. Sergeevichev**  
St. Petersburg State Forestry Academy

#### The Math Model of Working Wood Materials in Rolling Presses

The math model of the wood materials rolling in shaft presses of constant action allows to define the basic power points and to execute the analysis of wood material tense condition.

*Keywords:* plywood pipes, tension, tension analysis, mathematical model.

