

УДК 629.114.4.001.2

С. И. МОРОЗОВ

Архангельский государственный технический университет

Морозов Станислав Иванович родился в 1929 г., окончил в 1952 г. Ленинградскую лесотехническую академию, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Архангельского государственного технического университета, член-корреспондент РИА, заслуженный деятель науки и техники РФ. Имеет около 140 печатных работ в области изучения устойчивости температурно-напряженного рельсового пути, закрепления его от угона рельсов, удара тел, применения ЭВМ при решении задач механики.



### О МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОУДАРЕНИЕ АВТОМОБИЛЕЙ

Приведена математическая модель для исследования процесса соударения автомобилей. Рассмотрена задача на боковой удар, приведены ее результаты, дан анализ решения.

The mathematical model is presented for investigating the automobile collision process. The problem on side collision has been considered, its results and analysis of its solution have been presented.

Решение задач на соударение автомобилей необходимо, прежде всего, при анализе дорожно-транспортных происшествий, методика расчета которых приведена в ряде работ, например [1, 2]. В этих работах для получения расчетных зависимостей автомобиль принят за материальную точку, что далеко от реальности.

В работах [3, 5] автомобиль рассматривают уже как материальное тело. Эта модель существенно ближе к реальной задаче, однако полученные с ее помощью расчетные зависимости весьма грубо моделируют реальный процесс соударения тел (полагают, например, что оба автомобиля имеют в точке соударения абсолютно гладкую поверхность).

Физическим условиям процесса соударения двух тел больше соответствует схема (рис. 1), приведенная в работе [5]. Она использована нами ниже при изучении различных случаев соударения автомобилей.

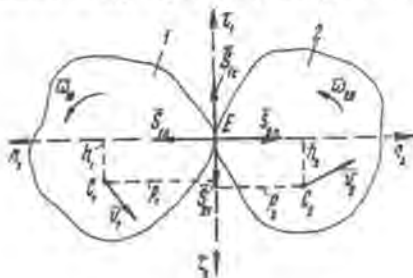


Рис. 1. Расчетная схема для плоского удара двух тел: 1 – ударяющее тело; 2 – ударяемое тело

Под математической моделью какого-либо процесса понимают систему расчетных уравнений и программу ее решения на ЭВМ. Расчетные зависимости применительно к схеме на рис. 1 имеют вид:

а) для определения импульсов ударных сил:

при ударе с проскальзыванием тел в точке соударения  $E$

$$S_n = -\frac{A_1(1+\varepsilon)}{G + H f_d}; \quad (1)$$

$$S_\tau = S_n f_d; \quad (2)$$

при ударе без проскальзывания в точке соударения  $E$

$$S_n = \frac{HA_2 - G_1 A_1(1+\varepsilon)}{B}; \quad (3)$$

$$S_\tau = \frac{HA_1(1+\varepsilon) - GA_2}{B}. \quad (4)$$

где  $S_n, S_\tau$  – импульсы ударных сил, приложенные в точке соударения и направленные по нормали и касательной к поверхности тел;  
 $G, G_1, H, B$  – инерциальные коэффициенты:

$$G = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{h_1^2}{I_1} + \frac{h_2^2}{I_2};$$

$$G_1 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{p_1^2}{I_1} + \frac{p_2^2}{I_2};$$

$$H = \frac{\bar{p}_1 \bar{h}_1}{I_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{h}_2}{I_2};$$

$$B = G G_1 - H^2;$$

$A_1, A_2$  – скоростные коэффициенты:

$$A_1 = \bar{v}_1 \bar{n}_1 + \bar{v}_2 \bar{n}_2 + \bar{h}_1 \bar{\omega}_{10} + \bar{h}_2 \bar{\omega}_{20};$$

$$A_2 = \bar{v}_1 \bar{\tau}_1 + \bar{v}_2 \bar{\tau}_2 + \bar{p}_1 \bar{\omega}_{10} + \bar{p}_2 \bar{\omega}_{20};$$

$\varepsilon$  – коэффициент восстановления тел в точке  $E$  при ударе. Его значение определяют экспериментально. Для упругого удара полагают  $\varepsilon = 1$ , для неупругого удара  $\varepsilon = 0$ . При соударении сплошных стальных тел  $\varepsilon = 0,5 \dots 0,7$  в зависимости от скорости соударения;

$f_d$  – мгновенный динамический коэффициент трения скольжения при ударе. Значения  $f_d$  также находят экспериментально. Задача по определению  $f_d$  выходит за рамки настоящей статьи и будет рассмотрена отдельно;

$m_1, m_2$  – массы соударяющихся тел;

$I_1, I_2$  – их моменты инерции относительно осей, проходящих через центры масс тел (точки  $C_1$  и  $C_2$ ) и направленных нормально к плоскостям тел;

$h_1, p_1, h_2, p_2$  – координаты центров масс автомобилей в системе координат  $\tau$  и  $n$ , как показано ниже на рассматриваемых расчетных схемах;

$\bar{\tau}, \bar{n}$  – орты осей координат;

$v_1, v_2$  – скорости центров масс тел до удара;

$\omega_{10}, \omega_{20}$  – угловые скорости тел до удара;

б) для определения линейных и угловых скоростей тел после удара:

$$\bar{u}_1 \bar{\tau}_1 = \bar{v}_1 \bar{\tau}_1 + \frac{S_\tau}{m_1}; \quad (5)$$

$$\bar{u}_1 \bar{n}_1 = \bar{v}_1 \bar{n}_1 + \frac{S_n}{m_1}; \quad (6)$$

$$\bar{u}_2 \bar{\tau}_2 = \bar{v}_2 \bar{\tau}_2 + \frac{S_\tau}{m_2}; \quad (7)$$

$$\bar{u}_2 \bar{n}_2 = \bar{v}_2 \bar{n}_2 + \frac{S_n}{m_2}; \quad (8)$$

$$\omega_1 = \omega_{10} + \frac{S_\tau \bar{p}_1}{I_1} + \frac{S_n \bar{h}_1}{I_1}; \quad (9)$$

$$\omega_2 = \omega_{20} + \frac{S_\tau \bar{p}_2}{I_2} + \frac{S_n \bar{h}_2}{I_2}. \quad (10)$$

В формулах (5) – (10) обозначено:

$u_1 \tau_1, u_2 \tau_2$  – проекции скоростей центров масс тел (точки  $C_1$  и  $C_2$ ) после удара по оси координат  $\tau_1$  и  $\tau_2$ ;

$u_1 n_1, u_2 n_2$  – проекции скоростей точек  $C_1$  и  $C_2$  после удара на оси  $n_1$  и  $n_2$ ;

$\bar{v}_1 \bar{n}_1, \bar{v}_1 \bar{\tau}_1, \bar{v}_2 \bar{\tau}_2, \bar{v}_2 \bar{n}_2$  – проекции скоростей точек  $C_1$  и  $C_2$  до удара.

В приведенных обозначениях индекс 1 соответствует ударяющему телу, индекс 2 – ударяемому.

Для облегчения вычисления по формулам (1) – (10) нами составлена программа для решения задач удара на ЭВМ. Блок-схема такой программы приведена на рис. 2.

В статье подробно рассмотрен только один случай соударения – боковой попутный удар автомобилей.

Принятая нами расчетная схема показана на рис. 3. Каждый автомобиль изображен здесь в виде прямоугольника со сторонами  $L$  и  $B$ . Предполагаем, что габаритные размеры этих автомобилей одинаковы и отличаются только

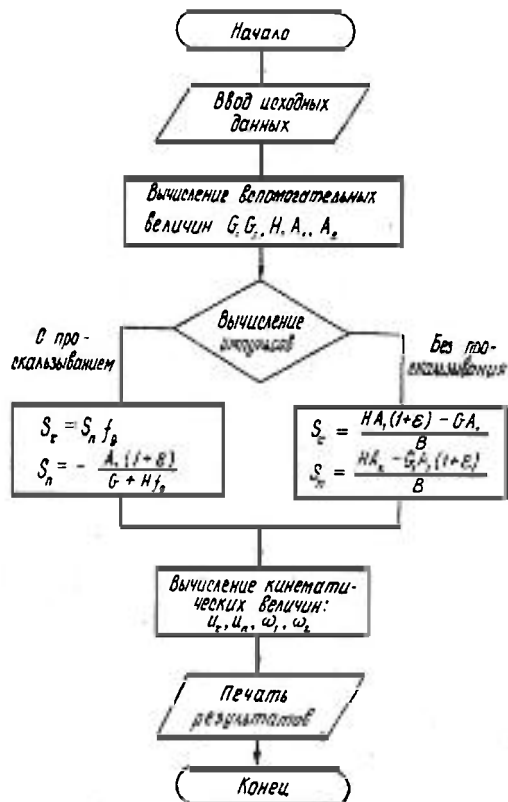


Рис. 2. Блок-схема решения задачи удара на ЭВМ

массами (ударяющий автомобиль – порожний, ударяемый – груженный).

Зададим следующие значения расчетных величин:  $m_1 = 1045$  кг  
 $m_2 = 1445$  кг;  $I_1 = 1527$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_2 = 2197$  кг·м<sup>2</sup>;  $\varepsilon = 0,5$ ;  $v_1 = 5, 10, 20$  м/с;  $\omega_{10} = 0$   
 $\omega_{20} = 0$ ;  $\alpha = 15 \dots 90^\circ$ . Для всех расчетных случаев  $v_2 = 10$  м/с.

Значения  $h_1$  и  $p_1$  вычислим по формулам

$$h_1 = l_1 \cos \alpha - B_1 \sin \alpha;$$

$$p_1 = l_1 \sin \alpha + B_1 \cos \alpha,$$

где  $l_1$  – расстояние от точки  $C_1$  до переднего бампера автомобиля,  $l_1 = 1,728$  м;  
 $B_1$  – половина ширины автомобиля,  $B_1 = B/2 = 0,82$  м.

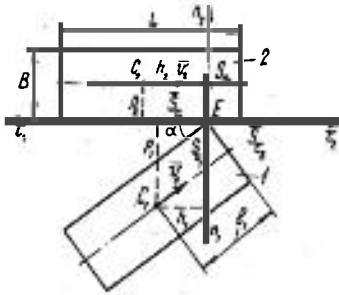


Рис. 3. Расчетная схема бокового удара автомобилей

Значения  $h_2 = 1,9165$  м и  $p_2 = 0,82$  м в данном случае соударения постоянны.

При вычислении инерциального коэффициента  $H$  необходимо правильно определить знаки произведений  $\bar{p}_1 \bar{h}_1$  и  $\bar{p}_2 \bar{h}_2$ . Если вектора  $\bar{h}_1$  и  $\bar{p}_1$  или  $\bar{h}_2$  и  $\bar{p}_2$  направлены в одну сторону, то их произведения положительны, в противоположные – отрицательны. Результаты расчетов некоторых величин при  $v_1 = 5$  м/с в зависимости от угла  $\alpha$  приведены в табл.1.

Во второй графе табл.1 записаны значения  $H$ , которые вычисляли по формуле

$$H = \frac{\bar{p}_1 \bar{h}_1}{I_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{h}_2}{I_2}. \quad (a)$$

Коэффициент  $H$  является знакопеременным и зависит от знаков слагаемых (в данном случае выражение  $\frac{\bar{p}_1 \bar{h}_1}{I_1}$  – отрицательно,  $\frac{\bar{p}_2 \bar{h}_2}{I_2}$  – положительно).

Таблица 1

$\alpha$ , град	$H, 10^4 \cdot \text{кг}^{-1}$	$G, 10^3 \cdot \text{кг}^{-1}$	$A_1, \text{м/с}$	$S_n, \text{Н}\cdot\text{с}$	$S_n, \text{Н}\cdot\text{с}$	$f_n$	$S_n^*, \text{Н}\cdot\text{с}$
1	2	3	4	5	6	7	8
15	-8,4032	3,4213	-1,2941	148,8	-1704,0	11,45	567,4
30	-7,7796	2,8044	-2,5000	955,2	-1377,0	1,44	1337,2
45	-4,1549	2,3013	-3,5355	2056,3	-1374,7	0,67	2304,2
60	1,4997	2,0468	-4,3301	3308,5	-1844,4	0,56	3173,2
75	7,6691	2,1092	-4,8296	4467,1	-2839,2	0,64	3434,7
90	12,4300	2,4397	-5,0000	5188,1	-4150,1	0,80	3074,1

Найдем значение граничного угла  $\alpha = \alpha_r$ , при котором  $H = 0$ , т. е. решим уравнение

$$-\frac{\bar{p}_1 \bar{h}_1}{I_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{h}_2}{I_2} = 0 \quad (б)$$

для следующих исходных данных:  $l_1 = 1,9165$  м,  $B/2 = 0,82$  м,  $I_1 = 1527$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_2 = 2197$  кг·м<sup>2</sup>,  $h_1 = l_1 \cos \alpha - B/2 \sin \alpha$ ,  $p_1 = l_1 \sin \alpha + B/2 \cos \alpha$ ,  $h_2 = 0,9165$  м,  $p_2 = 0,82$  м.

Варьируя угол  $\alpha$ , находим  $\alpha_r = 56,318^\circ$ . В общем случае при  $\alpha \leq \alpha_r$  имеем  $H < 0$ , при  $\alpha > \alpha_r$   $H > 0$ . Это условие соответствует данным второй графы.

Третья и четвертая графы табл. 1 содержат значение инерциального коэффициента  $G$  и скоростного коэффициента  $A_1$ . Они необходимы для вычисления по формуле (1) импульсов  $S_n$  и  $S_r$  при ударе с проскальзыванием.

В пятой и шестой графах даны значения импульсов  $S_n$  и  $S_r$  при ударе без проскальзывания в точке  $E$ , которые вычисляли по формулам (3) и (4).

В седьмой графе приведены значения коэффициента  $f_n$  – предельного коэффициента трения при ударе без скольжения. Его находили по формуле

$$f_n = \frac{|S_r|}{S_n}$$

Если фактический мгновенный динамический коэффициент трения  $f_d < f_n$ , то соударение автомобилей будет происходить с проскальзыванием, если  $f_d > f_n$  – без проскальзывания.

Значение  $f_n$  может быть и больше, и меньше единицы. Здесь речь идет о мгновенном динамическом коэффициенте трения, в отличие от обычного (неударного) коэффициента трения скольжения, который всегда меньше единицы.

В последней графе табл. 1 приведены значения нормального импульса  $S_n^*$  при соударении гладких тел. Они вычислены по формуле (1) при  $f_d = 0$ .

Сравнивая  $S_n$  и  $S_n^*$ , отмечаем, что при достаточно малых значениях угла  $\alpha < \alpha_r$  имеем  $S_n > S_n^*$ , при больших углах ( $\alpha > \alpha_r$ )  $S_n < S_n^*$ . Границами между  $S_n$  и  $S_n^*$  является случай  $\alpha = \alpha_r = 56,318^\circ$ .

Значение  $S_n^*$  в диапазоне  $0 \leq f_d \leq f_n$  находят по уравнению (1). Результаты таких вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

$\alpha$ , град	Значение $S_n$ , Н·с, при различных значениях $f_d$					
	0	0,2	0,4	0,6		$f_n$
15	567,4	540,8	516,6	-		148,8
30	1337,2	1220,9	1203,6	1146,4		955,2
45	2304,5	2224,2	2149,3	2079,2		2056,3
60	3173,3	3220,5	3269,1	3294,0		3308,0
75	3435,7	3704,1	4019,3	4393,2		4467,1
90	3074,1	3429,9	3861,0	4427,6		5186,3

При  $f_d = f_n$  происходит слияние двух способов расчета: по формулам (1) и (3), т. е.  $S_n = S_n^*$ . Это подтверждает справедливость использованной методики расчета.

Рассмотрим влияние скорости движения первого тела до удара на импульс ударных сил и значения  $f_n$ . Для принятых исходных данных при переменном значении  $v$ , основные результаты расчета приведены в табл. 3

Таблица 3

$\alpha$ , град	$S_n$ , Н·с, при $v_1$ , м/с			$S_\tau$ , Н·с, при $v_1$ , м/с			$f_n$ , при $v_1$ , м/с		
	5	10	20	5	10	20	5	10	20
30	955	2736	6296	-1377	220	3415	1,4416	0,081	0,542
45	2056	4563	9577	-1375	-253	1990	0,6685	0,055	0,208
60	3308	6448	12726	-1844	-1376	-440	0,5575	0,213	0,035
75	4467	8024	15137	-2839	-3175	-3845	0,6356	0,396	0,254

Как видим, импульс  $S_n$  возрастает пропорционально увеличению скорости  $v_1$  ударяющего тела при всех значениях угла  $\alpha$ . Темп возрастания  $S_n$  зависит от угла  $\alpha$ . Например, для  $\alpha = 30^\circ$  при  $v_1 = 5$  м/с и  $v_1 = 20$  м/с значение  $S_n$  увеличивается примерно в 6 раз, для  $\alpha = 75^\circ$  в том же диапазоне изменения  $v_1$  – в 4 раза.

Зависимость  $S_\tau$  от  $v_1$  имеет в принципе параболический вид, и при некотором  $v_1$  значение  $S_\tau$  достигает минимума. Это первая особенность процесса соударения автомобилей. Вторая особенность состоит в том, что значение  $S_\tau$  может быть как отрицательным (при  $v_1 = 5$  м/с), так и положительным (для  $v_1 = 10$  м/с и  $v_1 = 20$  м/с). Следовательно, при  $S_\tau > 0$  вектор этого импульса направлен в сторону оси  $\tau$ , при  $S_\tau < 0$  – в обратную сторону.

Такой же параболический вид имеет зависимость  $f_n(\alpha)$ . Здесь также имеет место минимум  $f_n$ . При  $v_1 > 5$  м/с он может достигать сотых долей единицы. Например, при  $v_1 = 20$  м/с  $f_n = 0,035$ . В данном случае удар первого автомобиля по второму во всем диапазоне изменения  $f_n$  происходит без проскальзывания.

Импульс ударной силы  $S_n$  и другие расчетные величины после удара зависят также от положения точки соударения на поверхности ударяемого тела. На рис. 4 показано пять таких точек, положение которых определяется расстоянием  $x$  от переднего бампера автомобиля. Соответствующие значения  $S_n$ ,  $S_\tau$  и  $f_n$  в зависимости от  $x$  приведены в табл. 4. Расчет выполнен по формулам (3) и (4), т. е. удар без проскальзывания, при  $v_1 = 10$  м/с,  $v_2 = 10$  м/с,  $\alpha = 30^\circ$ .

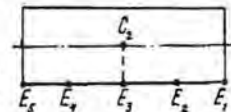


Рис. 4. Схема положения точек удара  $E$  на боковой поверхности второго автомобиля

Таблица 4

$x$ , м	$S_n$ , Н·с	$S_\tau$ , Н·с	$f_n$
0	1815	-169	0,093
1	2735	220	0,080
1,9165	3418	696	0,204
3,0730	2934	898	0,306
4,0730	1935	667	0,345

Анализ данных таблицы показывает, что импульсы  $S_n$  и  $S_\tau$  изменяются от  $x$  по параболическому закону, т. е. сначала (при  $x = 0$ ) возрастают, с увеличением  $x$  достигают максимума, а затем уменьшаются. Изменения значений  $f_n$  с увеличением  $x$  также имеют вид параболы, направленной выпуклостью к оси  $x$ .

Таким образом, анализ результатов расчета позволяет установить закономерности изменения  $S_n$ ,  $S_\tau$ ,  $f_n$  и найти их численные значения. Этот анализ ограничен рамками статьи, однако он показывает, что используемая методика позволяет определить величины  $S_n$ ,  $S_\tau$  и  $f_n$  для различных расчетных случаев и схем соударения автомобилей.

Зная  $S_n$ ,  $S_\tau$  и  $f_n$ , можно по формулам (6) – (10) определить скорости точек  $C_1$  и  $C_2$ , а также угловые скорости тел после удара. Пример такого расчета при  $v_1 = 5$  м/с,  $v_1 = 10$  м/с,  $x = 1$  м приведен в табл. 5. Остальные данные приняты по табл. 1.

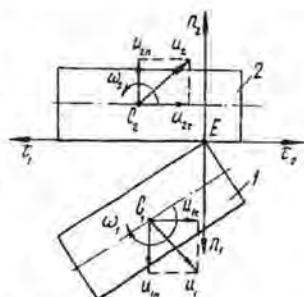


Рис. 5. Схема векторов скоростей после удара

Таблица 5

α, град	Скорость точки $C_1$ , м/с			Скорость точки $C_2$ , м/с			Угловая скорость $\omega^{-1}$	
	$u_{1\tau}$	$u_{1n}$	$u_1$	$u_{2\tau}$	$u_{2n}$	$u_2$	$\omega_1$	$\omega_2$
15	-6,46	-1,15	6,56	8,82	0,103	8,82	-0,74	0,70
30	-5,65	-1,58	5,87	9,05	0,66	9,07	-0,74	0,91
45	-4,85	-1,57	5,10	9,04	1,42	9,16	-0,76	1,37
60	-4,26	-1,16	4,42	8,72	2,29	9,02	-1,97	2,07
75	-4,01	-0,55	4,04	8,04	3,09	8,61	-4,51	2,93
90	-4,05	-0,03	4,06	7,13	3,59	7,88	-7,42	3,71

Векторы скоростей автомобилей и их направления вращений после удара показаны на рис. 5.

Отметим, что первое тело после удара придет во вращательное движение по часовой стрелке ( $\omega_1 < 0$ ), второе – против часовой стрелки ( $\omega_2 > 0$ ). Аналогично определяются линейные и угловые скорости для других схем соударения автомобилей после удара.

Зная линейные и угловые скорости после удара, можно затем рассмотреть вторую часть задачи, т. е. определить движение автомобиля по поверхности дороги до остановки.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Боровской Б.Е. Безопасность движения автомобильного транспорта. - Л.: Лениздат, 1984. - 304 с. [2]. Доброгорский В.Я., Киреев В.А., Рубан В. И. Классификация видов столкновений и экспертное определение места столкновения транспортных средств (по материалам обобщения экспертной практики). - М., 1985. - 53 с. - (Обзор. информ./ВНИИСЭ; Вып. 5). [3]. Иларионов В.А. Экспертиза дорожно-транспортных происшествий: Учеб. для вузов. - М.: Транспорт, 1989. - 255 с. [4]. Морозов С.И. Удар двух тел: Методич. указания по решению