Режим работы	Максимальный крутящий момент, кН · м, на передачах		
	I	II	III
Полуоси переднего моста с активной осью*			
Без груза	7,89/7,96	5,45/5,51	12,88/12,84
	8,21/8,19	12,08/12,05	9,34/9,40
	7,57/7,53	13,37/13,27	13,37/13,27
	9,82/9,65	12,24/12,10	12,88/12,84
С грузом	11,76/11,43	12,56/12,88	14,17/13,69
	9,18/9,27	12,08/12,88	14,17/14,17
	11,43/11,43	13,21/12,96	9,98/10,17
	11,27/11,76	12,88/12,56	13,69/14,17
Мосты трактора**			
Без груза	11,27/9,6	14,49/15,22	19,97/12,79
	12,24/10,59	16,75/15,00	10,63/13,42
	13,85/11,00	13,85/13,60	15,32/14,97
	13,21/9,2	15,14/14,81	14,38/15,84
С грузом	14,49/15,04	11,92/15,81	15,46/15,40
	14,49/15,81	20,94/16,40	19,33/16,21
	14,17/15,40	18,36/16,80	12,56/15,40
	14,89/15,62	19,44/16,37	15,46/15,81

* В числителе — данные для правой полуоси, в знаменателе — для левой.

** В числителе — данные для первого моста, в знаменателе — для второго.

Значения максимальных крутящих моментов, полученные в процессе проведения экспериментов, приведены в таблице. Данные таблицы показывают, что наличие активной оси в лесозаготовительной машине на базе трактора МТЗ-82В позволяет разгружать передний мост в режиме трогания с места без груза и с грузом на 45 ... 55 %.

Поступила 1 марта 1993 г.

УДК 629.4.001.24

С. И. МОРОЗОВ

Архангельский государственный технический университет

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ УДАРА НА ЛЕСОТРАНСПОРТЕ

Рассмотрена методика решения задач удара при плоскопараллельном движении тел. Получена система расчетных уравнений, позволяющих решить многие задачи соударения тел при транспортировке грузов по лесовозным УЖД. Дан пример решения задачи.

The methods of solving impact problems on flat-parallel motion of the bodies are considered. The system of calculated equations allowing to solve many collision problems on transporting the cargoes by logging narrow-gauge railroads is developed. An example of the problem solution is given.

Удар тел имеет место на всех стадиях лесозаготовительного производства, от валки леса до отгрузки готовой продукции. В одних операциях (валка) он не влияет существенно на технологический процесс, в других (погрузочно-разгрузочные и транспортные операции) необходимо учитывать ударные взаимодействия тел на отдельных стадиях их движения.

В настоящей статье приведена методика решения задач удара в общем случае плоскопараллельного движения тел с помощью так называемой классической теории удара. Она позволяет определить линейные и угловые скорости тел после удара, что весьма существенно при изучении их последующего движения. Вопросы, связанные с определением времени удара и ударных сил, здесь не рассматриваются.

Методика решения задач плоского удара приведена как в учебной [1, 3], так и в специальной [2, 4] литературе. Однако она пока не доведена до вида, удобного для практического применения.

Как известно, в классической теории удара используют теоремы об изменениях количества движения и момента количества движения тел, а также понятие коэффициента восстановления, предложенного И. Ньютоном. Отсюда для расчетной схемы, приведенной на рис. 1, имеем следующие системы исходных уравнений

$$m_1(\bar{u}_1 - \bar{v}_1) = S_{1n}\bar{n}_1 + S_{1\tau}\bar{\tau}_1; \qquad (1)$$

$$m_2(\bar{u}_2 - \bar{v}_2) = S_{2n}\bar{n}_2 + S_{2\tau}\bar{\tau}_2; \qquad (2)$$

$$I_1(\omega_1 - \omega_{10}) = S_{1n}h_1 + S_{1\tau}p_1; \qquad (3)$$

$$I_2(\omega_2 - \omega_{20}) = -S_{2n}h_2 + S_{2\tau}p_2; \qquad (4)$$

$$\bar{u}_1'\bar{n}_1 + \bar{u}_2'\bar{n}_2 = -\varepsilon(\bar{v}_1'\bar{n}_1 + \bar{v}_2'\bar{n}_2), \qquad (5)$$

где

m_1, m_2 — массы соударяющихся тел;

I_1, I_2 — моменты инерции тел относительно их центров масс (точки C_1 и C_2);

$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ω_{10}, ω_{20} — линейные (для точек C_1 и C_2) и угловые скорости тел до удара;

$\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, ω_1, ω_2 — то же после удара;

τ_1, n_1 (τ_2, n_2) — оси координат, имеющие начало в точке соударения E и направленные по касательной и нормали к поверхности тел в точке E. Каждая пара осей образует правостороннюю систему координат;

$\bar{\tau}_1$, $\bar{n}_1$, $\bar{\tau}_2$, $\bar{n}_2$ — орты осей координат;

S_{1n}, S_{2n}, $S_{1\tau}$, $S_{2\tau}$ — составляющие импульсов ударных сил, направленные по осям координат, $S_{1n} = S_{2n} = S_n$; $S_{1\tau} = S_{2\tau} = S_\tau$;

h_1, h_2 — перпендикуляры, опущенные из точек C_1 и C_2 на оси n_1 и n_2;

p_1, p_2 — то же на оси τ_1 и τ_2;

ε — коэффициент восстановления при ударе, определяемый экспериментально;

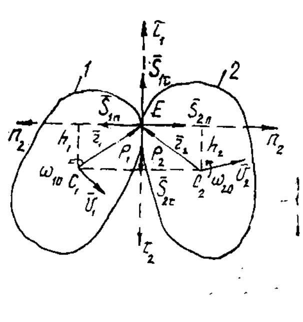

Рис. 1. Расчетная схема

$\bar{v}'$, $\bar{v}$, $\bar{u}'_1$, $\bar{u}'_2$ — скорости точки E до и после удара. Они связаны со скоростями точек C_1 и C_2 зависимостями

$$\bar{v}'_1 = \bar{v}_1 + \bar{\omega}_{10}\bar{r}_1; \quad \bar{u}'_1 = \bar{u}_1 + \bar{\omega}_1\bar{r}_1;$$

$$\bar{v}'_2 = \bar{v}_2 + \bar{\omega}_{20}\bar{r}_2; \quad \bar{u}'_2 = \bar{u}_2 + \bar{\omega}_2\bar{r}_2;$$

$\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ — радиусы-векторы точки E для первого и второго тел.

Преобразуем систему уравнений (1) — (4). Для этого первое и второе уравнения спроектируем на ось координат, третье и четвертое запишем в векторной форме. В итоге получим шесть уравнений

$$\begin{aligned} &m_1(\bar{u}_1\bar{\tau}_1 - \bar{v}_1\bar{\tau}_1) = S_\tau; \\ &m_1(\bar{u}_1\bar{n}_1 - \bar{v}_1\bar{n}_1) = S_n; \\ &m_2(\bar{u}_2\bar{\tau}_2 - \bar{v}_2\bar{\tau}_2) = S_\tau; \\ &m_2(\bar{u}_2\bar{n}_2 - \bar{v}_2\bar{n}_2) = S_n; \\ &I_1(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{10}) = S_n\bar{h}_1 + S_\tau\bar{p}_1; \\ &I_2(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_{20}) = S_n\bar{h}_2 + S_\tau\bar{p}_2, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\bar{u}\bar{\tau}$, $\bar{u}\bar{n}$, $\bar{v}\bar{\tau}$, $\bar{v}\bar{n}$ — проекции скоростей $\bar{u}$ и $\bar{v}$ на оси τ и n;

$\bar{h}$, $\bar{p}$ — вектора расстояний h и p, расположенные перпендикулярно к плоскости рисунка. Их модули можно рассматривать как координаты точек C_1 и C_2 в соответствующих системах координат для первого и второго тел. В дальнейшем при решении задач их значения записывают со знаком плюс или минус.

Система уравнений (6) содержит восемь неизвестных и в конечном виде решения не имеет. Необходимо получить еще два уравнения. Одним из них является уравнение (5), а второе получим из условия взаимодействия тел в точке контакта тел E.

В общем случае связь между составляющими импульсов S_τ и S_n имеет вид

$$S_\tau \leqslant fS_n, \tag{7}$$

где f — динамический коэффициент трения между поверхностями соударяющихся тел.

Здесь возможны три случая:

а) если поверхности тел гладкие, то $f = 0$, следовательно, второе дополнительное уравнение

$$S_\tau = 0; \tag{7а}$$

б) если при ударе происходит проскальзывание тел, то второе дополнительное уравнение

$$S_\tau = fS_n; \tag{7б}$$

в) если выполняется условие

$$S_\tau < fS_n,$$

то в точке E проскальзывание не происходит, и второе дополнительное уравнение можно записать из условия равенства касательных составляющих скоростей после удара в точке E, т. е.

$$\bar{u}_1'\bar{\tau}_1 + \bar{u}_2'\bar{\tau}_2 = 0. \qquad (7в)$$

С помощью уравнения (5) и одного из условий (7а), (7б) или (7в) задачу плоского удара можно решить полностью.

При записи расчетных уравнений в аналитическом виде положение скоростей $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ будем определять через тригонометрические функции углов α_1 и α_2, которые эти вектора образуют с осями τ_1 и τ_2. Углы откладывают от положительного направления этих осей (или параллельных им линий, проведенных из точек C_1 и C_2) против часовой стрелки до векторов $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$, как это показано на рис. 2. Например,

$$\bar{v}_1\bar{\tau}_1 = v_1 \sin \alpha_1;$$

$$\bar{v}_1\bar{n}_1 = v_1 \cos \alpha_1,$$

и знак проекции получается «автоматически».

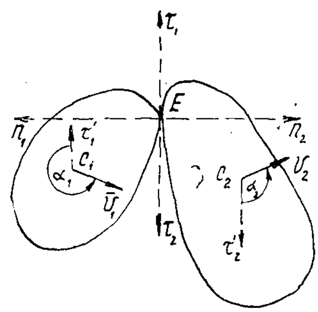

Рис. 2. Схема для определения углов α_1 и α_2

Сначала необходимо определить значения величин S_τ и S_n в результате решения двух дополнительных уравнений (5) и (7). Опуская промежуточные преобразования, получаем выражения, приведенные в табл. 1. В представленных в таблице расчетных уравнениях обозначено

Таблица 1

Номер уравнения	Условие для f	Наличие проскальзывания	Расчетные уравнения для S_τ	Расчетные уравнения для S_n
7а	$f = 0$	Нет	0	$-\dfrac{(1+\varepsilon)A_1}{G}$
7б	$f \neq 0$	Есть	$S_n f$	$-\dfrac{(1+\varepsilon)A_1}{G+f}$
7в	$f \neq 0$	Нет	$\dfrac{H(1+\varepsilon)A_1 - GA_2}{B}$	$\dfrac{HA_2 - G_1(1+\varepsilon)A_1}{B}$

Здесь

$$G = 1/m_1 + 1/m_2 + h_1^2/I_1 + h_2^2/I_2;$$

$$G_1 = 1/m_1 + 1/m_2 + p_1^2/I_1 + p_2^2/I_2;$$

$$H = p_1 h_1/I_1 + p_2 h_2/I_2;$$

$$B = GG_1 - H^2;$$

$$A_1 = v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2 + h_1 \omega_{10} + h_2 \omega_{20};$$

$$A_2 = v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + p_1 \omega_{10} + p_2 \omega_{20}.$$

Затем находим все кинематические величины

$$u_{1\tau} = v_1 \cos \alpha_1 + S_\tau / m_1;$$

$$u_{1n} = v_1 \sin \alpha_1 + S_n / m_1;$$

$$u_{2\tau} = v_2 \cos \alpha_2 + S_\tau / m_2;$$

$$u_{2n} = v_2 \sin \alpha_2 + S_n / m_2;$$

$$\omega_1 = \omega_{10} - S_n h_1 / I_1 + S_\tau p_1 / I_1;$$

$$\omega_2 = \omega_{20} - S_n h_2 / I_2 + S_\tau p_2 / I_2.$$

При пользовании этими уравнениями значения ω_{10}, ω_{20}, h и p необходимо подставлять с соответствующими знаками.

В качестве примера рассмотрим соударение двух вагонов (платформ, сцепов) в точке E их буферно-сцепной группы при попутном движении перед ударом на прямом горизонтальном участке пути. Такой случай соударения имеет место, например, на маневровых работах.

Примем: $m_1 = 15$ т; $m_2 = 5 \ldots 30$ т; $v_1 = 5$ м/с; $v_2 = 0$, 2, 4 м/с; $\varepsilon = 0$; 0,5; 1,0; $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$. Влиянием вращающихся масс (колесных пар) пренебрегаем, т. е. оба вагона рассматриваем как два поступательно движущихся тела. В этом случае их радиусы инерции равны бесконечности, поэтому $I_1 = I_2 = \infty$. Отсюда следует, что значения h и p можно не определять, так как при делении их на $I = \infty$ получим в результате нули. Для рассматриваемого случая удара (рис. 3) имеем $\alpha_1 = 90°$ и $\alpha_2 = 90°$.

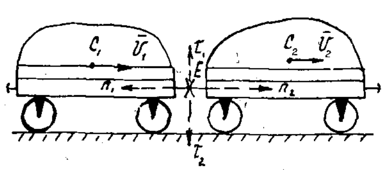

Рис. 3. Схема соударения вагонов

Используя приведенные в условии данные, находим

$$G = G_1 = 1/m_1 + 1/m_2 = (m_1 + m_2)/(m_1 m_2);$$

$$H = 0; \quad A_1 = -v_1 + v_2; \quad A_2 = 0; \quad S_\tau = 0;$$

$$S_n = \frac{m_1 m_2 (1 + \varepsilon)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2};$$

$$u_{1n} = -v_1 + \frac{m_2 (1 + \varepsilon)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2};$$

$$u_{2n} = v_2 + \frac{m_1 (1 + \varepsilon)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2};$$

$$u_{1\tau} = u_{2\tau} = \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

Эти выражения общеизвестны. Однако приведенные нами расчетные уравнения позволяют получить решение и значительно более сложных задач. Результаты решения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Исходные данные				Результаты расчета								
u_1	u_2	m_1	m_2	u_{1n}, м/с, при ε			u_{2n}, м/с, при ε			S_n, кН · с, при ε		
м/с		т		0	0,5	1,0	0	0,5	1,0	0	0,5	1,0
5	0	15	5	—3,75	—3,13	—2,2	3,75	5,6	7,5	18,7	28,1	37,5
			10	—3,0	—2,0	—1,0	3,0	4,5	6,0	30,0	45,0	60,0
			15	—2,5	—1,25	0	2,5	3,75	5,0	37,5	56,2	75,0
			30	—	0	3,75	—	2,5	2,0	—	75,0	98,5
5	2	15	5	—4,25	—3,88	—3,5	4,25	5,38	6,5	11,2	16,9	22,5
			10	—3,8	—3,2	—2,6	3,8	4,7	5,6	18,0	27,0	36,0
			15	—3,5	—2,75	—2,0	3,5	4,25	5,0	22,5	33,7	45,0
			25	—3,13	—2,19	—1,25	3,13	3,69	4,25	28,1	42,4	56,2
5	4	15	5	—4,75	—4,62	—4,5	4,75	5,12	5,5	3,75	5,6	7,5
			10	—4,6	—4,4	—4,2	4,6	4,9	5,2	6,0	9,0	12,0
			15	—4,5	—4,25	—4,0	4,5	4,75	5,0	7,5	11,2	15,0

Отсюда можно сделать следующие выводы.

1. Практически во всех рассмотренных вариантах направление движения вагонов после удара не изменяется, т. е. $u_{1n} < 0$, $u_{2n} > 0$.

2. При определенных условиях первый вагон после удара приобретает скорость второго вагона до удара. Из равенства $u_{1n} = -v_2$ имеем, что в этих случаях $m_2 = m_1/\varepsilon$. Например, для $\varepsilon = 0$ получим $m_2 = \infty$, для $\varepsilon = 0,5$ $m_2 = 2m_1$, для $\varepsilon = 1$ $m_2 = m_1$. Такая закономерность подтверждается данными табл. 2 для каждого значения начальной скорости.

3. Во всех вариантах расчета выполняется условие Ньютона, которое в рассматриваемом примере имеет вид

$$u_{1n} + u_{2n} = \varepsilon (v_1 - v_2).$$

Например, при $v_1 = 5$ м/с, $v_2 = 4$ м/с, $\varepsilon = 0,5$ по формуле получим

$$u_{1n} + u_{2n} = 0,5 (5 - 4) = 0,5.$$

Для неупругого удара $\varepsilon = 0$ скорости обоих вагонов после удара будут одинаковы. Значения их можно найти по формулам

$$u_{1n} = -\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

$$u_{2n} = -\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

где знак минус для скорости u_{1n} показывает, что она направлена в сторону, обратную оси n_1.

4. При упругом и частично упругом ударах выполняется условие

$$u_{2n} > |u_{1n}|,$$

т. е. после удара вагоны разъединяются и дальше будут двигаться по отдельности. В ряде случаев скорость второго вагона после удара больше скорости первого вагона до удара, т. е. больше $v_1 = 5$ м/с.

5. Полученные зависимости можно использовать для экспериментального определения коэффициента восстановления, которое другим способом получить трудно.

Рассмотрим методику выполнения такого эксперимента. На рис. 4, *а* показаны два вагона в момент соударения, на рис. 4, *б* — их конечное положение после удара. Запишем расчетную систему уравнений. По теории удара

$$u_{1n} = -v_1 + \frac{m_2(1+\varepsilon)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2};$$

$$u_{2n} = v_2 + \frac{m_1(1+\varepsilon)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2};$$

по теореме об изменении кинетической энергии

$$u_{1n} = \sqrt{2gws_1};$$

$$u_{2n} = \sqrt{2gws_2},$$

где s_1, s_2 — прокат первого и второго вагонов после удара;
w — удельное сопротивление движению вагонов.

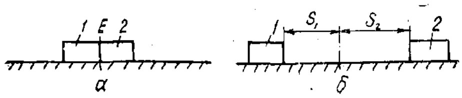

Рис. 4. Схема для определения коэффициента восстановления. E — плоскость соударения

Решая совместно первое и второе уравнения при условии $v_2 = 0$, находим неизвестные ε и v_1 через скорости вагонов после удара.

Опуская промежуточные преобразования, записываем выражение для ε и v в окончательном виде:

$$\varepsilon = \frac{m_1(u_{1n} + u_{2n})}{m_2 u_{2n} - m_1 u_{1n}};$$

$$v_1 = \frac{m_2 u_{2n} - m_1 u_{1n}}{m_1}.$$

Подставим в эти уравнения выражения для u_{1n} и u_{2n}, тогда

$$\varepsilon = \frac{m_1(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})}{m_2\sqrt{s_2} - m_1\sqrt{s_1}};$$

$$v_1 = \frac{m_2\sqrt{s_2} - m_1\sqrt{s_1}}{m_1}\sqrt{2gw}.$$

Таким образом, чтобы вычислить ε, достаточно измерить прокат вагонов после удара s_1 и s_2 и знать их массы m_1 и m_2. Однако для вычисления скорости первого тела до удара необходимо знать еще удельное сопротивление движению вагонов.