

состава на железнодорожный путь.— Архангельск: Сев.-Зап. кн. изд-во, 1976.— 100 с.
[3]. Шахуняиц Г. М. Железнодорожный путь.— М.: Транспорт, 1969.— 535 с.

Поступила 5 марта 1992 г.

УДК 624.072.233.5

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА НАГЕЛЯ В ДРЕВЕСИНЕ

В. П. СТУКОВ

Архангельский лесотехнический институт

Нагель в древесине работает в условиях сложного напряженно-деформированного состояния. В общем случае его можно рассматривать как балку, лежащую на упругом основании и нагруженную на конце изгибающим моментом M_0 , поперечной силой Q_0 и растягивающей силой N_0 .

Дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба балки, лежащей на упругом линейно-деформируемом основании, имеет вид [1]

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - N_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + Ky = 0, \quad (1)$$

где y — прогиб балки;
 EI — модуль упругости материала и момент инерции площади поперечного сечения балки;

K — коэффициент жесткости линейного упругого основания — реакция, приходящаяся на единицу длины балки при прогибе, равном единице, $K = K_0 d$ (K_0 — коэффициент постели; d — диаметр нагеля);

Вид решения уравнения (1) зависит от корней характеристического уравнения r :

$$EI r^4 - N_0 r^2 + K = 0 \quad (2)$$

и от дискриминанта

$$D = N_0^2 - 4KEI, \quad (3)$$

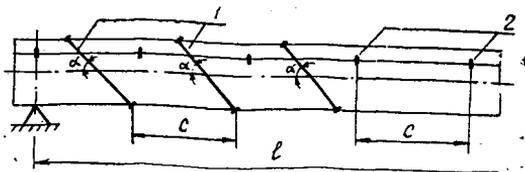
который, согласно [1], можно записать в виде

$$D = \sqrt{KEI} - 2G\omega, \quad (4)$$

где G, ω — модуль сдвига материала и приведенная площадь поперечного сечения балки (нагеля).

В работах [2, 3] рассмотрены случаи $D < 0$ и $D = 0$. Случай $D > 0$ соответствует использованию напрягаемой арматуры для объединения ветвей балки комбинированного сечения [2]. Такая схема имеет много общего с расчетной схемой нагельного соединения (рис. 1).

Рис. 1. Схема размещения нагелей: 1 — напрягаемых; 2 — ненапрягаемых; l — пролет балки; c — расстояние между нагельями



При $D > 0$, т. е. $2G\omega < \sqrt{KEI}$, общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$y_x = e^{-\alpha x} C_1 + e^{\alpha x} C_2 + e^{-\beta x} C_3 + e^{\beta x} C_4, \quad (5)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{N_0}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{N_0}{EI}\right)^2 - \frac{K}{EI}}}; \quad (6)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{N_0}{2EI} - \sqrt{\left(\frac{N_0}{EI}\right)^2 - \frac{K}{EI}}}; \quad (7)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования, определяемые в зависимости от условий на концах загруженного участка балки.

Для получения уравнений эйлер y, φ, M и Q целесообразно использовать метод начальных параметров.

Рассмотрим балку на упругом основании, загруженную на конце изгибающим моментом M_0 , поперечной силой Q_0 и растягивающей силой N_0 (рис. 2). Начало координат поместим на левом конце балки. При таком расположении координатных осей знаки деформаций и усилий считаем положительными.

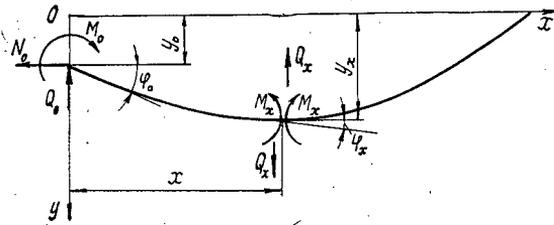


Рис. 2. Расчетная схема балки на упругом основании в случае сложного изгиба

Введем обозначение

$$t = \alpha/\beta, \quad (8)$$

откуда

$$\alpha = t\beta. \quad (9)$$

Подставив значение α в формулу (5), получим

$$y_x = e^{-t\beta x} C_1 + e^{t\beta x} C_2 + e^{-\beta x} C_3 + e^{\beta x} C_4. \quad (10)$$

Дифференцируя (10) по x , находим

$$\varphi_x = \frac{dy}{dx} = \beta (-t e^{-t\beta x} C_1 + t e^{t\beta x} C_2 - e^{-\beta x} C_3 + e^{\beta x} C_4); \quad (11)$$

$$M_x = -EI \frac{d^2y}{dx^2} = -EI\beta^2 [t^2 (e^{-t\beta x} C_1 + e^{t\beta x} C_2) + e^{-\beta x} C_3 + e^{\beta x} C_4]; \quad (12)$$

$$Q_x = -EI \frac{d^3y}{dx^3} = EI\beta^3 [t^3 (e^{-t\beta x} C_1 - e^{t\beta x} C_2) + e^{-\beta x} C_3 - e^{\beta x} C_4]. \quad (13)$$

Определим постоянные интегрирования C через y_0, φ_0, M_0, Q_0 в начале координат при $x=0$. Тогда уравнение (10) относительно C_4 примет вид

$$C_4 = y_0 - C_1 - C_2 - C_3. \quad (14)$$

Решая выражения (11) — (13) с учетом (14), получаем

$$\varphi_0 = \beta [y_0 - (t+1)C_1 + (t-1)C_2 - 2C_3]; \quad (15)$$

$$M_0 = -EI\beta^2 [y_0 + (t^2-1)C_1 + (t^2-1)C_2]; \quad (16)$$

$$Q_0 = EI\beta^3 [-y_0 + (t^3+1)C_1 - (t^3-1)C_2 + 2C_3]. \quad (17)$$

Запишем уравнения (15) — (17) в матричной форме

$$\begin{vmatrix} -(t+1) & t-1 & -2 \\ t^2-1 & t^2-1 & 0 \\ t^2+1 & -(t^3-1) & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\varphi_0}{\beta} - y_0 \\ -\frac{M_0}{EI\beta^2} - y_0 \\ \frac{Q_0}{EI\beta^3} + y_0 \end{vmatrix} \quad (18)$$

или

$$\vec{A}\vec{C} = \vec{H}. \quad (18')$$

Решение системы уравнений (18) относительно C_1, C_2, C_3 имеет вид

$$\vec{C} = A^{-1}\vec{H}, \quad (19)$$

где A^{-1} — матрица, обратная матрице A .

или

$$\begin{aligned} \vec{C} = \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2t(t^2-1)} & \frac{1}{2(t^2-1)} & \frac{1}{2t(t^2-1)} \\ -\frac{1}{2t(t^2-1)} & \frac{1}{2(t^2-1)} & \frac{1}{2t(t^2-1)} \\ -\frac{t^2}{2t(t^2-1)} & -\frac{1}{2(t^2-1)} & -\frac{1}{2(t^2-1)} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\varphi_0}{\beta} - y_0 \\ -\frac{M_0}{EI\beta^2} - y_0 \\ \frac{Q_0}{EI\beta^3} + y_0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2(t^2-1)} \begin{vmatrix} -y_0 + \frac{1}{t} \frac{1}{\beta} \varphi_0 - \frac{1}{EI\beta^2} M_0 + \frac{1}{t} \frac{1}{EI\beta^3} Q_0 \\ -y_0 - \frac{1}{t} \frac{1}{\beta} \varphi_0 - \frac{1}{EI\beta^2} M_0 - \frac{1}{t} \frac{1}{EI\beta^3} Q_0 \\ t^2 y_0 - t^2 \frac{1}{\beta} \varphi_0 + \frac{1}{EI\beta^2} M_0 - \frac{1}{EI\beta^3} Q_0 \end{vmatrix}. \quad (20) \end{aligned}$$

Постоянную интегрирования C_4 найдем из выражений (10), (14) и (20):

$$\begin{aligned} C_4 = \frac{t^2}{2(t^2-1)} y_0 + \frac{t^2}{2(t^2-1)} \frac{1}{\beta} \varphi_0 + \frac{1}{2(t^2-1)} \frac{1}{EI\beta^2} M_0 + \\ + \frac{1}{2(t^2-1)} \frac{1}{EI\beta^3} Q_0. \quad (21) \end{aligned}$$

Введем промежуточные обозначения

$$K_1 = \frac{1}{2(t^2-1)}; \quad K_2 = \frac{1}{2t(t^2-1)}; \quad K_3 = \frac{t^2}{2(t^2-1)}, \quad (22)$$

тогда имеем

$$C_1 = -K_1 y_0 + \frac{K_2}{\beta} \varphi_0 - \frac{K_1}{EI\beta^2} M_0 + \frac{K_2}{EI\beta^3} Q_0; \quad (23)$$

$$C_2 = -K_1 y_0 - \frac{K_2}{\beta} \varphi_0 - \frac{K_1}{EI\beta^2} M_0 - \frac{K_2}{EI\beta^3} Q_0; \quad (24)$$

$$C_3 = K_3 y_0 - \frac{K_3}{\beta} \varphi_0 + \frac{K_1}{EI\beta^2} M_0 - \frac{K_1}{EI\beta^3} Q_0; \quad (25)$$

$$C_4 = K_3 y_0 + \frac{K_3}{\beta} \varphi_0 + \frac{K_1}{EI\beta^2} M_0 + \frac{K_1}{EI\beta^3} Q_0. \quad (26)$$

С учетом (23) — (26) уравнение (10) принимает вид

$$\begin{aligned}
 y_x = & 2y_0 \left(-K_1 \frac{e^{t\beta x} + e^{-t\beta x}}{2} + K_3 \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \right) + \\
 & + \frac{1}{\beta} 2\varphi_0 \left(-K_2 \frac{e^{t\beta x} - e^{-t\beta x}}{2} + K_3 \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \right) - \\
 & - \frac{1}{EJ\beta^2} 2M_0 K_1 \left(\frac{e^{t\beta x} + e^{-t\beta x}}{2} - \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \right) - \\
 & - \frac{1}{EJ\beta^3} 2Q_0 \left(K_2 \frac{e^{t\beta x} - e^{-t\beta x}}{2} - K_1 \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \right). \quad (27)
 \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 A_x = & 2 \left(-K_1 \frac{e^{t\beta x} + e^{-t\beta x}}{2} + K_3 \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \right) = \\
 = & 2 (-K_1 \operatorname{ch} t\beta x + K_3 \operatorname{ch} \beta x); \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_x = & 2 \left(-K_2 \frac{e^{t\beta x} - e^{-t\beta x}}{2} + K_3 \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \right) = \\
 = & 2 (-K_2 \operatorname{sh} t\beta x + K_3 \operatorname{sh} \beta x); \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$C_x = 2K_1 \left(\frac{e^{t\beta x} + e^{-t\beta x}}{2} - \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \right) = 2K_1 (\operatorname{ch} t\beta x - \operatorname{ch} \beta x); \quad (30)$$

$$D_x = 2 \left(K_2 \frac{e^{t\beta x} - e^{-t\beta x}}{2} - K_1 \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \right) = 2 (K_2 \operatorname{sh} t\beta x - K_1 \operatorname{sh} \beta x). \quad (31)$$

Здесь A_x, B_x, C_x, D_x — функции влияния.

С учетом (28) — (31) имеем

$$y_x = y_0 A_x + \frac{1}{\beta} \varphi_0 B_x - \frac{1}{EJ\beta^2} M_0 C_x - \frac{1}{EJ\beta^3} Q_0 D_x. \quad (32)$$

Уравнения для φ_x, M_x и Q_x получим непосредственным дифференцированием выражения (32). Возьмем первые производные от функций влияния A_x, B_x, C_x, D_x :

$$\frac{dA_x}{dx} = \beta \frac{t}{t^2 - 1} (-\operatorname{sh} t\beta x + t \operatorname{sh} \beta x); \quad (33)$$

$$\frac{dB_x}{dx} = \beta \frac{1}{t^2 - 1} (-\operatorname{ch} t\beta x + t^2 \operatorname{ch} \beta x); \quad (34)$$

$$\frac{dC_x}{dx} = \beta \frac{1}{t^2 - 1} (t \operatorname{sh} t\beta x - \operatorname{sh} \beta x); \quad (35)$$

$$\frac{dD_x}{dx} = \beta \frac{1}{t^2 - 1} (\operatorname{ch} t\beta x - \operatorname{ch} \beta x). \quad (36)$$

Анализ выражений (33) — (36) и (28) — (31) с учетом обозначений (22) позволяет установить взаимосвязь $\frac{dA_x}{dx}$ и D_x ; $\frac{dB_x}{dx}$ и A_x ; $\frac{dC_x}{dx}$ и B_x ; $\frac{dD_x}{dx}$ и C_x . Здесь имеются одни и те же гиперболические функции при одинаковом их сочетании. Это позволяет представить выражения (33) — (36) в следующем виде:

$$\frac{dA_x}{dx} = -\beta t^2 D_x; \quad (33')$$

$$\frac{dB_x}{dx} = \beta A_x; \quad (34')$$

$$\frac{dC_x}{dx} = -\beta t^2 \left(B_x - \frac{t^2 + 1}{2t^2} \operatorname{sh} \beta x \right); \quad (35')$$

$$\frac{dD_x}{dx} = \beta C_x. \quad (36')$$

Подставив значения первых производных функций A_x, B_x, C_x, D_x в уравнение (32), получим уравнение углов поворота:

$$\varphi_x = \varphi_0 A_x + \frac{1}{EI\beta} M_0 t^2 \left(B_x - \frac{t^2 + 1}{2t^2} \operatorname{sh} \beta x \right) - \frac{1}{EI\beta^2} Q_0 C_x - \beta y_0 t^2 D_x. \quad (37)$$

Вторые производные от функций A_x, B_x, C_x, D_x с учетом взаимосвязи $\frac{d^2 A_x}{dx^2}$ и C_x ; $\frac{d^2 B_x}{dx^2}$ и D_x ; $\frac{d^2 C_x}{dx^2}$ и A_x ; $\frac{d^2 D_x}{dx^2}$ и B_x и обозначений (22) принимают вид

$$\frac{d^2 A_x}{dx^2} = -\beta^2 t^2 C_x; \quad (38)$$

$$\frac{d^2 B_x}{dx^2} = -\beta^2 t^3 D_x; \quad (39)$$

$$\frac{d^2 C_x}{dx^2} = -\beta^2 t^2 \left(A_x - \frac{t^2 + 1}{2t^2} \operatorname{ch} \beta x \right); \quad (40)$$

$$\frac{d^2 D_x}{dx^2} = -\beta^2 t^2 \left(B_x - \frac{t^2 + 1}{2t^2} \operatorname{sh} \beta x \right). \quad (41)$$

Подставив значения вторых производных функций A_x, B_x, C_x, D_x в уравнение (32) и умножив его на $-EI$, получим уравнение изгибающих моментов

$$M_x = -M_0 t^2 \left(A_x - \frac{t^2 + 1}{2t^2} \operatorname{ch} \beta x \right) - Q_0 \frac{1}{\beta} t^2 \left(B_x - \frac{t^2 + 1}{2t^2} \operatorname{sh} \beta x \right) + \beta^2 EI y_0 t^2 C_x + \beta EI \varphi_0 t^2 D_x. \quad (42)$$

Третьи производные от функций A_x, B_x, C_x, D_x с учетом взаимосвязи $\frac{d^3 A_x}{dx^3}$ и B_x ; $\frac{d^3 B_x}{dx^3}$ и C_x ; $\frac{d^3 C_x}{dx^3}$ и D_x ; $\frac{d^3 D_x}{dx^3}$ и A_x и обозначений (22) запишем в виде

$$\frac{d^3 A_x}{dx^3} = \beta^3 t^4 \left(B_x - \frac{t^2 + 1}{2t^2} \operatorname{sh} \beta x \right); \quad (43)$$

$$\frac{d^3 B_x}{dx^3} = -\beta^3 t^2 C_x; \quad (44)$$

$$\frac{d^3 C_x}{dx^3} = \beta^3 t^4 \left(D_x + \frac{t^2 + 1}{t^4} \operatorname{sh} \beta x \right); \quad (45)$$

$$\frac{d^3 D_x}{dx^3} = -\beta^3 t^2 \left(A_x - \frac{t^2 + 1}{2t^2} \operatorname{ch} \beta x \right). \quad (46)$$

Подставив значения третьих производных функций A_x, B_x, C_x, D_x в уравнение (32) и умножив его на $-EI$, получим уравнение поперечных сил

$$Q_x = -Q_0 t^2 \left(A_x - \frac{t^2 + 1}{2t^2} \operatorname{ch} \beta x \right) - \beta^3 EI y_0 t^4 \left(B_x - \frac{t^2 + 1}{2t^2} \operatorname{sh} \beta x \right) + \beta^2 EI \varphi_0 t^2 C_x + \beta M_0 t^4 \left(D_x + \frac{t^2 + 1}{2t^4} \operatorname{sh} \beta x \right). \quad (47)$$

Для балок на упругом основании характерно проявление краевого эффекта, т. е. затухание всех элементов изгиба балки, вызванного локальными усилиями, по мере удаления от места их приложения. Согласно [1] для полубесконечной балки протяженностью $l_{кр}$ участка влияния усилий на конце балки

$$l_{кр} = (1,5 \dots 2,0) \sqrt[4]{EI/K}. \quad (48)$$

Для рассматриваемого случая, когда напрягаемая объединительная арматура работает аналогично нагелю, $l_{кр} = 15 \dots 25$ см. Принятие ее длины в балках комбинированного сечения больше $l_{кр}$ объясняется выполнением дополнительных функций и разного рода конструктивных требований.

Использование метода начальных параметров позволяет не только получить общий интеграл уравнения $EI \frac{d^4 y}{dx^4} - N_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = P - ky$ для случая, когда P дана в виде непрерывной функции, но и учесть произвольную прерывную и сосредоточенную нагрузки, а также заранее заданную деформацию балки.

Учет растягивающей осевой силы N_0 целесообразен при $N_0 \geq (0,8 \dots 1,0) \sqrt{KEI}$ [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Справочник по строительной механике корабля. Т. 1.— Л.: Судостроение, 1982.— 376 с. [2]. Стуков В. П. Теоретические основы расчета нагеля в древесине // Лесн. журн.— 1991.— № 5.— С. 48—55.— (Изв. высш. учеб. заведений). [3]. Стуков В. П. Случай расчета нагеля в древесине // Лесн. журн.— 1992.— № 2.— С. 50—54.— (Изв. высш. учеб. заведений).

Поступила 24 февраля 1992 г.