УДК 624.011.1:620.17

Б.В. Лабудин, Р.П. Матвеев, Р.С. Санжаровский

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ, УСИЛЕННЫХ ТИТАНОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ*

На основании теоремы Лагранжа–Дирихле определено критическое состояние сжато-изогнутого стержня, усиленного титановыми элементами.

Ключевые слова: внецентренное сжатие, титановые элементы, прочность и устойчивость стержней, критерии устойчивости.

Цель статьи – разработать методику определения критического состояния композитного стрежня, усиленного титановым элементом в виде трубчатого элемента (оболочки), при полном исчерпании его несущей способности. При этом использованы следующие допущения: справедлива гипотеза Бернулли–Кирхгофа – приближенное выражение кривизны изогнутой оси описывают зависимостью типа $y \neq f(x)$; применяют известную диаграмму материалов σ–ε; считают, что силы инерции при статическом загружении пренебрежимо малы.

Деформирование материала композитного стрежня рассматривают с учетом как линейной, так и нелинейной ползучести [1].

В качестве критерия потери устойчивости введем общеизвестное условие равенства вариаций моментов внешних и внутренних сил:

$$\delta M = \delta M_{\text{вн}}; \quad \delta P_{\text{вн}} = 0, \tag{1}$$

где M – момент внешних сил относительно центра вращения;

$M_{\text{вн}}, P_{\text{вн}}$ – главные момент и вектор эпюры нормальных напряжений в наиболее нагруженном сечении стержня (из известных соотношений внутренних усилий [3]).

Можно показать, что условие (1) в соответствии с теоремой Лагранжа–Дирихле описывает как устойчивое, так и неустойчивое равновесие системы. При этом в устойчивом состоянии она имеет минимум потенциальной энергии:

$$Э = U + V = U - W, \tag{2}$$

где U – потенциальная энергия деформированного изогнутого стержня;

V – изменение потенциала внешней нагрузки;

W – работа внешних сил при искривлении стержня.

В соответствии с вышеуказанной теоремой для устойчивого состояния справедливо выражение

$$\delta Э = \delta U - \delta W > 0, \tag{3}$$

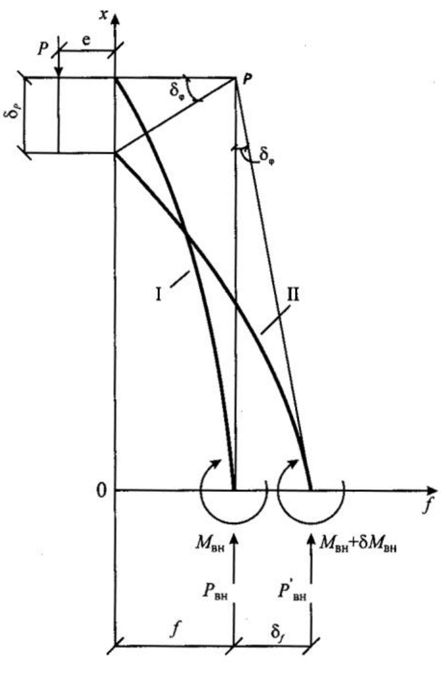
в неустойчивом состоянии равновесия

$$\delta Э = \delta U - \delta W < 0. \tag{4}$$

Тогда критерий потери устойчивости

$$\delta Э = 0; \quad \delta U = \delta W. \tag{5}$$

Принимая вышеприведенные гипотезы и допущения, заменяем систему с бесконечным числом степеней свободы системой с одной степенью свободы.



* Продолжение работы [3].

Рассмотрим часть стержня, отделенного наиболее нагруженным сечением или расположенного в зоне «усиления». Стержень может находиться в двух положениях: невозмущенное – I, возмущенное – II (рис. 1).

Переход стержня из положения I в положение II рассматривают как поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг мгновенного центра вращения p. При этом перемещении работа внешних сил

Рис. 1. Схема перехода стержня из невозмущенного состояния (I) в возмущенное (II)

$$\delta W = M\delta\varphi = P(e + f)\delta\varphi, \qquad (6)$$

где e – эксцентриситет.

Работа внутренних сил является приращением этих сил:

$$\delta U = \int_0^{\delta\varphi} M^*_{\text{вн}} \delta\varphi = M_{\text{вн}}\delta\varphi + \frac{1}{2}\delta M_{\text{вн}}\delta\varphi - \frac{1}{2}P_{\text{вн}}\delta f\delta\varphi, \qquad (7)$$

где $M^*_{\text{вн}}$ – внутренний момент с учетом вращения.

С учетом условий равновесия вышеприведенные уравнения можно представить следующим образом:

$$\delta M_{\text{вн}} = P\delta f, \qquad (8)$$

где f – отклонение стержня от продольной оси.

В правой части формулы (8) приведена величина, равная вариации момента внешних сил, преобразование которой позволит определить условие потери устойчивости стержня из (1):

$$\delta M = \delta M_{\text{вн}}; \qquad \delta P_{\text{вн}} = 0. \qquad (9)$$

Учитывая, что $M_{\text{вн}}$ и $P_{\text{вн}}$ являются функциями параметров, после подстановки получаем [5]:

$$P\delta f = \frac{\delta M_{\text{вн}}}{\delta\beta}\delta\beta + \frac{\delta M_{\text{вн}}}{\delta\varphi}\delta\varphi + \frac{\delta M_{\text{вн}}}{\delta\varphi_1}\delta\varphi_1 + \frac{\delta M_{\text{вн}}}{\delta\theta}\delta\theta + \frac{\delta M_{\text{вн}}}{\delta\theta_1}\delta\theta_1;$$

$$\frac{\delta P_{\text{вн}}}{\delta\beta}\delta\beta + \frac{\delta P_{\text{вн}}}{\delta\varphi}\delta\varphi + \frac{\delta P_{\text{вн}}}{\delta\varphi_1}\delta\varphi_1 + \frac{\delta P_{\text{вн}}}{\delta\theta}\delta\theta + \frac{\delta P_{\text{вн}}}{\delta\theta_1}\delta\theta_1 = 0. \qquad (10)$$

Обозначения к формулам (10) приведены в работе [3].

Из условия совместности деформаций можно получить уравнения связи:

$$\Phi_1(\beta, \varphi, \varphi_1, \Theta, \Theta_1) = 0;$$
$$\Phi_2(\beta, \varphi, \varphi_1, \Theta, \Theta_1) = 0; \qquad (11)$$
$$\Phi_3(\beta, \varphi, \varphi_1, \Theta, \Theta_1) = 0.$$

Выполнив дифференцирование (7), найдем прогиб f и его вариации δf:

$$f = f(\beta, \varphi); \qquad \delta f = \frac{\partial f}{\partial\beta}\delta\beta + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\delta\varphi. \qquad (12)$$

Однородная система уравнений (10)–(12) имеет нетривиальное решение, если определитель, составленный из коэффициентов при вариациях, равен нулю.

Следовательно, равенство нулю определителя пятого порядка и является условием потери устойчивости:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial M_{\text{вн}}}{\partial \beta} - P\frac{\partial f}{\partial \beta}\right) & \left(\frac{\partial M_{\text{вн}}}{\partial \varphi} - P\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) & \frac{\partial M_{\text{вн}}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial M_{\text{вн}}}{\partial \theta} & \frac{\partial M_{\text{вн}}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial P_{\text{вн}}}{\partial \beta} & \frac{\partial P_{\text{вн}}}{\partial \varphi} & \frac{\partial P_{\text{вн}}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial P_{\text{вн}}}{\partial \theta} & \frac{\partial P_{\text{вн}}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Отсюда получим уравнение, связывающее переменные в критическом состоянии стержня:

$$\Phi = \Phi\ (\beta, \varphi, \varphi_1, \Theta, \Theta_1) = 0\,. \qquad (14)$$

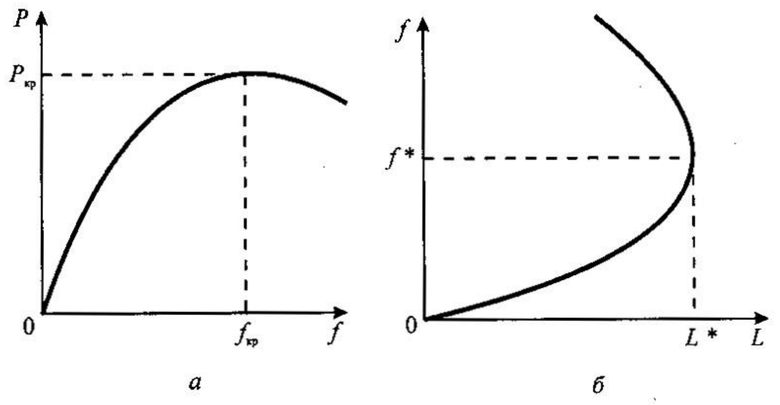


Рис. 2. Потеря устойчивости внецентренно сжатого стержня под нагрузкой: *а* – зависимость прогиб–нагрузка; *б* – критическая длина стержня L^*

Уравнение критического состояния можно получить также с помощью неопределенных множителей Лагранжа. При этом учитывается аналитическая зависимость прогиб–нагрузка внецентренно-сжатого стержня в упругопластической стадии (рис. 2, *а*). Тогда критерий потери устойчивости при фиксированной длине и эксцентриситете

$$dP / df = 0\,. \qquad (15)$$

Можно зафиксировать любую эпюру напряжений в среднем сечении, тогда из условия равновесия будем иметь уравнение $L(f) = 0$. Критической будет наибольшая длина L, соответствующая данному напряженному состоянию (рис. 2, *б*), т. е.:

$$dL / df = 0\,. \qquad (16)$$

Если f – функция параметров φ, $φ_1$, β, Θ, $Θ_1$, связанных уравнениями связи, то для нахождения критического состояния необходимо отыскать условный экстремум функции L (β,φ, $φ_1$, Θ, $Θ_1$) с помощью неопределенных множителей Лагранжа.

В случае кратковременного загружения критерий потери устойчивости, определенный по (9), (15), (16), будет иметь одинаковое значение. Это можно показать на примере [5], когда $M_{вн}$ и $P_{вн}$ являются функциями двух и более параметров.

Из условий равновесия

$$M_{вн}\ (a, c) = P(e + f); \tag{17}$$

$$P = P_{вн}\ (a, c), \tag{18}$$

где a – глубина зоны развития пластических деформаций;

c – глубина упругой зоны.

С помощью (15) запишем уравнение критического состояния через функцию Лагранжа:

$$Ф = P_{вн} + λ\ (P_{вн}\, e + \ P_{вн}\, f \ – M_{вн}), \tag{19}$$

где в качестве дополнительного параметра условия связи использовано (13).

Условие критического состояния:

$$\partial Ф = \partial a;\ \ \partial Ф /\partial c = 0, \tag{20}$$

что позволяет записать (15) в следующем виде:

$$\frac{\partial P_{вн}}{\partial a} + \lambda\left[\frac{\partial P_{вн}}{\partial a}(e+f) + P_{вн}\frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial M_{вн}}{\partial a}\right] = 0; \tag{21}$$

$$\frac{\partial P_{вн}}{\partial c} + \lambda\left[\frac{\partial P_{вн}}{\partial c}e + \frac{\partial P_{вн}}{\partial c}f + P_{вн}\frac{\partial f}{\partial c} - \frac{\partial M_{вн}}{\partial c}\right] = 0. \tag{22}$$

Исключая неопределенный множитель λ и учитывая, что прогиб $f = L^2 σ T_i / π^2 E\, c$, получаем

$$\frac{\partial M_{вн}}{\partial c} + P_{вн}\frac{L^2\sigma_{T_i}}{\pi^2 Ec} - \frac{\partial M_{вн}}{\partial a}\,\frac{\partial P_{вн}}{\partial c}\bigg/\frac{\partial P_{вн}}{\partial a} = 0. \tag{23}$$

Далее уравнение критического состояния определяем с помощью критерия (16) и находим длину стержня:

$$L = \pi\sqrt{\frac{Ec}{\sigma_{T_i}}\left(\frac{M_{вн}(a,c)}{P} - e\right)}. \tag{24}$$

Составляем функцию Лагранжа:

$$Ф = \left(\frac{M_{вн}}{P} - e\right)c + \lambda(P - P_{вн}), \tag{25}$$

где в качестве дополнительного условия используем выражение (18).

Тогда условия экстремума этой функции дают

$$\frac{\partial M_{вн}}{\partial c}\frac{1}{P} + \left(\frac{M_{вн}}{P} - e\right) + \lambda\left(-\frac{\partial P_{вн}}{\partial c}\right) = 0; \tag{26}$$

$$\frac{\partial M_{\text{вн}}}{\partial c}\frac{1}{P}c+\lambda\left(-\frac{\partial P_{\text{вн}}}{\partial c}\right)=0\,. \qquad (27)$$

Исключая неопределенный множитель Лагранжа и учитывая зависимость

$$\frac{1}{c}\left(M_{\text{вн}}-Pe\right)=\frac{1}{c^2}P\frac{L\sigma_{T_i}}{\pi^2 E}\,, \qquad (28)$$

получаем уравнение (23).

Уравнение критического состояния определяем с помощью критерия (9):

$$P\frac{\partial f}{\partial c}\delta c=\frac{\partial M_{\text{вн}}}{\partial a}\delta a+\frac{\partial M_{\text{вн}}}{\partial c}\delta c\,; \qquad (29)$$

$$\frac{\partial P_{\text{вн}}}{\partial a}\delta a=\frac{\partial P_{\text{вн}}}{\partial a}\delta c=0\,. \qquad (30)$$

Принимая определитель системы уравнений (19) равным нулю и учитывая, что $f = L^2\ \sigma_{T_i}\ /\pi^2 E\ c$, снова получаем выражение (23).

Таким образом, в случае кратковременного статического загружения критерии (9), (15), (16) дают тождественные результаты. При этом запись критерия потери устойчивости в виде (9) соответствует классической механике. Кроме того, критерий потери устойчивости при длительном загружении также записывается в виде (9).

Для расчетов все необходимые физико-механические характеристики композитных материалов и титана можно получить опытным путем или воспользоваться литературными данными [2, 4, 6]. Выполненные лабораторные испытания показали, что результаты эксперимента отличаются от справочных незначительно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аратюнян, Н.Х.* Теория ползучести неоднородных тел [Текст] / Н.Х. Аратюнян, В.Б. Колмановский. – М., 1983. – 336 с.

2. *Крюков, В.Н.* Механика и морфология переломов [Текст] / В.Н. Крюков. – М.: Медицина, 1986. – 160 с.

3. *Лабудин, Б.В.* Устойчивость сжато-изогнутых стержней, усиленных титановыми элементами [Текст] / Б.В. Лабудин, Р.П. Матвеев, Р.С. Санжаровский // Лесн. журн. – 2006. – № 3. – С. 145 – 150. – (Изв. высш. учеб. заведений).

4. *Подрушняк, Е.П.* Методы исследования костной системы / Е.П. Подрушняк, Е.Н. Суслов. – Киев: «Здров'я», 1975. – 112 с.

5. *Санжаровский, Р.С.* Устойчивость элементов строительных конструций при ползучести [Текст] / Р.С. Санжаровский. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 280 с.

6. Справочник конструктора-машиностроителя Т. 1 [Текст] / Под ред. В.И. Анурьева. – М.: Машиностроение, 1982. – 650 с.

Архангельский государственный
технический университет

Северный государственный
медицинский университет

С.-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

B.V. Labudin, R.P. Matveev, R.S. Sanzharovsky

Criteria of Compressed-bent Bars Sustainability Reinforced by Titanic Elements

The critical state of compressed-bent bar reinforced by titanic elements is determined based on Lagrange-Dirihle theorem.