УДК 630*377.44

Н.А. Иванов, Е.А. Мясников

Иванов Николай Алексеевич родился в 1951 г., окончил в 1973 г. Ленинградскую лесотехническую академию, кандидат технических наук, доцент кафедры технологии и оборудования лесопромышленного производства Хабаровского государственного технического университета. Имеет более 30 печатных работ в области транспорта лесных предприятий.

Мясников Евгений Анатольевич родился в 1967 г., окончил в 1989 г. Дальневосточный государственный университет, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Хабаровского государственного технического университета. Имеет около 10 печатных работ в области математического анализа.

ОЦЕНКА ПРОХОДИМОСТИ ТРЕХКОЛЕСНОГО ВЕЗДЕХОДА ПО ЛЕСИСТОЙ МЕСТНОСТИ

Представлены результаты теоретических исследований вероятности преодоления лесистой местности легким трехколесным вездеходом на пневматиках низкого давления.

Ключевые слова: вездеход, проходимость, вероятность, деревья.

1. Общая постановка задачи и предпосылки ее решения

В общем виде задачу можно сформулировать так: определить вероятность продвижения вездехода на расстояние L, м, если известны число деревьев N, шт., на пробной площади S_0, м^2, средний радиус дерева $R_0 \geq 0$ и ширина колеи вездехода b, м.

С практической точки зрения представляет интерес также решение обратной задачи, когда по известной вероятности преодоления лесистой местности определяется ширина колеи вездехода.

Деревья, произрастающие в лесу, относятся к непреодолимым препятствиям, вездеход их может только объехать. Поэтому состояние вездехода характеризуется понятиями «движение возможно» или «движение невозможно». Оценочным параметром проходимости является вероятность преодоления участка лесистой местности определенной длины.

Составление математических моделей исследуемых процессов предполагает определенную степень формализации или принятие некоторых допущений. Решим данную задачу при следующих допущениях:

1) вездеход изображаем в виде правильного треугольника. Это один из частных случаев формы трехколесного вездехода, принятый для более точного математического описания процесса его передвижения;

2) в любой момент при отсутствии препятствий возможны движение прямо вперед и повороты относительно точек касания задних колес с поверхностью. Поворот вокруг одного из задних колес осуществим при наличии в ведущем мосту симметричного конического дифференциала;

3) деревья расположены независимо друг от друга;

4) вероятность появления деревьев определяется только плотностью их размещения, но не формой участка.

Поскольку при поворотах точки вездехода перемещаются на разные расстояния, то учитываем движение середины задней оси (точка O, рис. 1).

Задача допускает две постановки:

1) движение происходит «вслепую», т. е. при первой же невозможности хода вперед или поворота вездеход останавливается;

2) путь водитель выбирает заранее в пределах обзора местности. В поисках пути вездеход может возвращаться назад. В этом случае учитывают расстояние от начальной до самой дальней достигнутой точки, а не общий пробег.

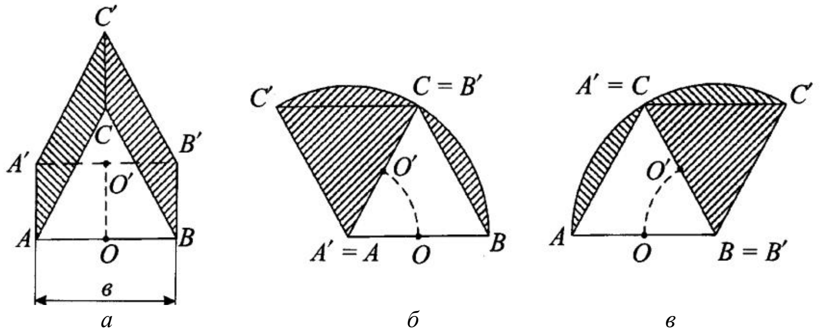


Рис. 1. Возможные перемещения вездехода на шаг 0,5b вперед: *а* – движение прямо; *б* – движение влево при повороте вокруг точки A; *в* – движение вправо при повороте вокруг точки B

Приведем решение для двух условий:

1) шаг вездехода составляет 0,5 b, где b – ширина колеи вездехода;

2) шаг можно сделать сколь угодно малым.

Первое условие упрощает вычисления, второе же максимально повышает маневренность и, как следствие, вероятность продвижения.

Решение задачи основано на том, что вероятность отсутствия точечных препятствий или деревьев на площади S составляет $e^{-S\rho}$, где $\rho = \dfrac{N}{S_0}$ – плотность размещения деревьев на участке. Если $R_0 > 0$, но $R_0 << b$, задачу можно свести к случаю, когда $R_0 = 0$, считая ширину колеи вездехода равной $b_0 = b + 2R_0$.

Обоснованность данного предположения вытекает из следующих соображений.

Пусть на участке площадью S_0 разбросано случайно N деревьев. Необходимо найти вероятность того, что на участке $S_1 < S_0$ нет ни одного дерева (или есть 1, 2, 3 … дерева). Разделим S_0 на малые участки ΔS, их число будет $\frac{S_0}{\Delta S}$ шт. Значение ΔS стремится к нулю, поэтому появление более чем одного дерева на ΔS считаем невозможным. Тогда вероятность появления более одного дерева на участке ΔS составляет $\frac{\Delta S}{S_0} N$, а вероятность отсутствия деревьев на ΔS, очевидно, равна $(1 - \frac{\Delta S}{S_0} N)$.

Назовем проверку участка ΔS испытанием, а появление дерева на ΔS – событием. Проверка участка S_1 состоит из $\frac{S_1}{\Delta S}$ испытаний, причем вероятность события в отдельном испытании стремится к нулю. Испытания независимы, так как появление дерева на одном ΔS никак не влияет на появление другого дерева на другом ΔS. Считая $\frac{S_1}{\Delta S}$ целым числом n, получаем по формуле Бернулли вероятность P_{S1} того, что на участке S_1 будет в точности k деревьев:

$$P_{S1}(k) = C_n^k \left(\frac{\Delta S}{S_0} N\right)^k \left(1 - \frac{\Delta S}{S_0} N\right)^{n-k}.$$

В частном случае при $k = 0$ получим вероятность отсутствия деревьев на участке S_1:

$$P_{S1}(0) = C_n^0 \left(\frac{\Delta S}{S_0} N\right)^0 \left(1 - \frac{\Delta S}{S_0} N\right)^{n} = \left(1 - \frac{\Delta S}{S_0} N\right)^{n},$$

т. е.

$$P_{S1}(0) = \left(1 - \frac{\Delta S}{S_0} N\right)^{\frac{S_1}{\Delta S}}.$$

Сделаем $\Delta S \to 0$, тогда по второму замечательному пределу $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \left(1 - \frac{\Delta S}{S_0} N\right)^{\frac{S_1}{\Delta S}} = \mathrm{e}^{-\frac{NS_1}{S_0}}$.

Но $\frac{N}{S_0}$ – плотность размещения деревьев на участке, поэтому окончательно получаем формулу для определения вероятности отсутствия деревьев на участке S_1 в следующем виде:

$$P_{S1}(0) = \mathrm{e}^{-\rho S_1}, \tag{1}$$

где ρ – плотность размещения деревьев на единице площади;

S_1 – площадь участка.

Этот вывод и положен в основу решения задачи.

2. Проходимость при ограничении маневренности

Ограничение маневренности вездехода заключается в том, что он может передвигаться только вперед без предварительной оценки местности и выбора маршрута, т. е. движение вездехода происходит «вслепую». Маневренность вездехода ограничивается также отсутствием передачи заднего хода в его силовой передаче. При первой же невозможности движения вперед или поворота вездеход останавливается.

Перемещения на $0{,}5b$ можно достичь тремя способами (рис. 1): движение вперед на $0{,}5b$; поворот влево или вправо на 60 ° относительно заднего левого или заднего правого колеса.

На рис. 1 ΔABC – исходное, $\Delta A'B'C'$ – новое положение вездехода. Движение вездехода возможно, если на заштрихованных площадях нет центров препятствий. Пунктиром показано фактическое перемещение вездехода $\Delta L = 0{,}5b$.

Площади заштрихованных частей составляют:
при перемещении вперед

$$S_{\text{вп}} = 2\frac{b}{2}\frac{b_0}{2} = \frac{bb_0}{2};$$

влево и вправо

$$S_{\text{л}} = S_{\text{пр}} = \frac{1}{2}b_0^2\frac{2\pi}{3} - \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}0472\,b_0^2 - 0{,}433b^2.$$

Соответственно, вероятность сдвига на $0{,}5b$ вперед, влево и вправо равна вероятности отсутствия деревьев на соответствующих площадях:

$$P(\text{вп}) = \mathrm{e}^{-0{,}5bb_0\rho};$$

$$P(\text{л}) = P(\text{пр}) = \mathrm{e}^{-1{,}0472b_0^2\rho + 0{,}433b^2\rho}.$$

Для вычисления вероятности сдвига хотя бы в одном из направлений необходимо знать вероятность сдвига в двух и всех трех направлениях. Площади, на которых должны отсутствовать препятствия, показаны на рис. 2.

Движение влево и вправо (рис. 2, *а*) возможно, если свободна площадь

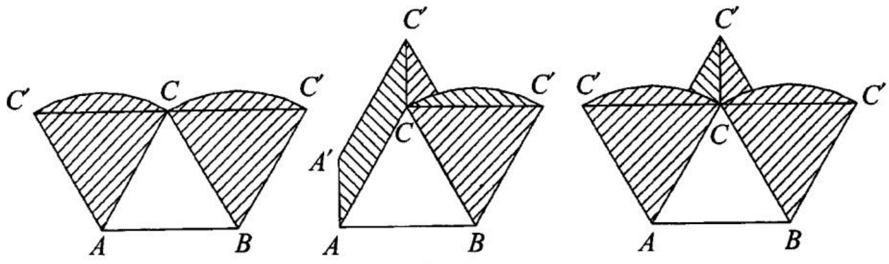
$$S_{\text{л,пр}} = 2S_{\text{сект}} = 2\left(\frac{1}{2}b_0^2\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}b_0^2 \approx 1{,}0472\,b_0^2.$$

Движение вправо и вперед (рис. 2, *б*) возможно, если свободна площадь

$$S_{\text{пр,вп}} = S_{\text{пар}} + S'_{\Delta} + \mathrm{S}_{\text{сект}} = \frac{b}{2}\frac{b_0}{2} + \frac{1}{2}b_0^2\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\frac{b}{2}\sin 30° \, \frac{b}{2}\cos 30° =$$

$$= 0{,}25bb_0 + \frac{\pi}{6}b_0^2 + \frac{\sqrt{3}}{32}b^2 \approx 0{,}25bb_0 + 0{,}5236\,b_0^2 + 0{,}0541b^2.$$

Такая же площадь должна быть свободна для движения влево и вперед (криволинейностью одной из сторон малого треугольника можно пренебречь).



а *б* *в*

Рис. 2. Площади, на которых должны отсутствовать препятствия при сочетании движений: *а* – при движении влево и вправо; *б* – при движении вправо и вперед (влево и вперед); *в* – при движении влево, вправо и вперед

Движение в любом направлении (рис. 2, *в*) возможно, если свободна площадь

4

$$S_{\text{общ}} = 2\left(S_{\text{сект}} + S'_{\Delta}\right) = 2\left(\frac{b_0^2\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{32}b^2\right) \approx 1{,}0472\,b_0^2 + 0{,}1082b^2.$$

По формуле вероятности суммы совместных событий

$$P(\Delta L = 0{,}5b) = P(\text{вп}) + P(\text{л}) + P(\text{пр}) - [P(\text{л, пр}) + P(\text{вп, пр}) + P(\text{вп, л})] + P_{\text{общ}},$$

т. е., исходя из формулы (1),

$$P(\Delta L = 0{,}5\text{b}) = \mathrm{e}^{-0{,}5bb_0\rho} + 2\mathrm{e}^{-1{,}0472b_0^2\rho + 0{,}433b^2\rho} + \mathrm{e}^{-1{,}0472b_0{}^2\rho - 0{,}1082b^2\rho} - \mathrm{e}^{-1{,}0472b_0^2\rho} -$$

$$- 2\mathrm{e}^{-0{,}25bb_0\rho - 0{,}5236b_0^2\rho - 0{,}0541b^2\rho}. \qquad (2)$$

Если $R_0 = 0$, то ширина колеи b совпадает с увеличенной шириной b_0 и формула (2) упрощается:

$$P(\Delta L = 0{,}5b) = \mathrm{e}^{-0{,}5b^2\rho} + 2\left(\mathrm{e}^{-0{,}6142b^2\rho} - \mathrm{e}^{-0{,}8277b^2\rho}\right) + \mathrm{e}^{-1{,}1554b^2\rho} - \mathrm{e}^{-1{,}0472b^2\rho}. \quad (3)$$

Введем $C = \mathrm{e}^{-b^2\rho}$, тогда

$$P(\Delta L = 0{,}5b) = C^{0{,}5} + 2\left(C^{0{,}6142} - C^{0{,}8277}\right) + C^{1{,}1554} - C^{1{,}0472}.$$

Для продвижения на расстояние L необходимо сделать $n = \dfrac{L}{\Delta L} = \dfrac{2L}{b}$ таких шагов. Вероятность того, что ни на одном шаге движение не будет остановлено, равна:

$$P(\Delta L = L) = \left[P(\Delta L = 0{,}5b)\right]^{2L/b}. \qquad (4)$$

Как показывают расчеты, эта вероятность очень мала даже при небольших плотностях из-за больших значений степени $2L/b$.

Заметим, что при малых значениях $b^2\rho$ (фактически менее 0,1) вычисление вероятности $P(\Delta L = 0{,}5b)$ можно упростить, воспользовавшись приближенной формулой

$$\mathrm{e}^{-x} \approx 1 - x + 0{,}5x^2 \text{ или } \mathrm{e}^{-x} \approx 1 - x.$$

Тогда

$$P(\Delta L = 0{,}5b) \approx 1 - (0{,}5 + 2\cdot 0{,}6142 - 2\cdot 0{,}8277 + 1{,}1554 - 1{,}0472)b^2\rho +$$
$$+ 0{,}5(0{,}5^2 + 2\cdot 0{,}6142^2 - 2\cdot 0{,}8277^2 + 1{,}1554^2 - 1{,}0472^2)b^4\rho^2 = 1 - 0{,}1812b^2\rho -$$
$$- 0{,}0637b^4\rho^2$$

или

$$P(\Delta L = 0{,}5b) \approx 1 - 0{,}1812b^2\rho.$$

Поскольку $1 - 0{,}1812b^2\rho \approx e^{-0{,}1812b^2\rho}$, получаем дальнейшее упрощение:

$$P(\Delta L = L) = \left(e^{-0{,}1812\,b^2\rho}\right)^{2L/b} \approx e^{-0{,}3624\rho bL}. \qquad (5)$$

Возможность использования формулы для приближенных вычислений покажем на конкретных примерах.

Пример 1. При $\rho = 0{,}1$; $b = 2$ м; $L = 50$ м ($b^2\rho = 0{,}4$) получаем: непосредственным вычислением по формулам (3), (4) $P_0 = 0{,}015$; приближенным вычислением по формуле (5) $e^{-0{,}3624\cdot 10} = e^{-3{,}624} \approx e^{-3{,}6}\, e^{-0{,}024} \approx \approx 0{,}0273 \cdot (1–0{,}024 + 0{,}000288) \approx 0{,}0273 \cdot 0{,}97629 \approx 0{,}026$. Как видим, при данной плотности размещения деревьев вычисление вероятности по приближенной формуле дает завышенный результат. Расхождение возникло из-за накопления погрешностей при возведении в большую степень.

Пример 2. При $\rho = 0{,}01$; $b = 2$ м; $L = 50$ м ($b^2\rho = 0{,}04$) получаем: непосредственным вычислением $P_0 = 0{,}692$; приближенным вычислением $e^{-0{,}3624} = e^{-0{,}3}e^{-0{,}00624} \approx 0{,}7408\cdot 0{,}9395 = 0{,}696$. В данном случае результат практически не зависит от методики вычислений.

3. Проходимость при минимизации шага передвижения

Методика решения данной задачи та же, что и для предыдущей. Пусть α – угол поворота вездехода относительно заднего колеса (рис. 3, *б*), причем $\alpha \approx 0$, поэтому $\sin\alpha \approx \alpha$ (в радианной мере). При этом шаг передвижения будет $\Delta L = 0{,}5b\alpha$.

Минимизация шага передвижения вездехода повышает его маневренность и поэтому создает предпосылки для повышения вероятности преодоления им лесистой местности.

Для движения вперед на расстояние $0{,}5b\alpha$ (рис.3, *а*) необходимо иметь следующую свободную площадь:

$$2S_{AA'C'C} = 2\frac{b\alpha}{2}\frac{b_0}{2} = \frac{bb_0\alpha}{2}.$$

При повороте влево или вправо на α рад (рис. 3, *б, в*) площадь, на которой не должно быть деревьев:

$$S_{\text{пр}} = S_{\text{лев}} \approx S_{\Delta BCC'} + S_{\Delta AA'E} = \frac{b_0^2\alpha}{2} + (b_0\alpha)^2\left(\frac{\sqrt{3}+2\alpha}{1+\alpha\sqrt{3}}\right) =$$

$$= b_0^2\alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha(\sqrt{3}+2\alpha)}{1+\alpha\sqrt{3}}\right) \approx \frac{b_0^2\alpha}{2}\left(\frac{1+3\alpha\sqrt{3}}{1+\alpha\sqrt{3}}\right).$$

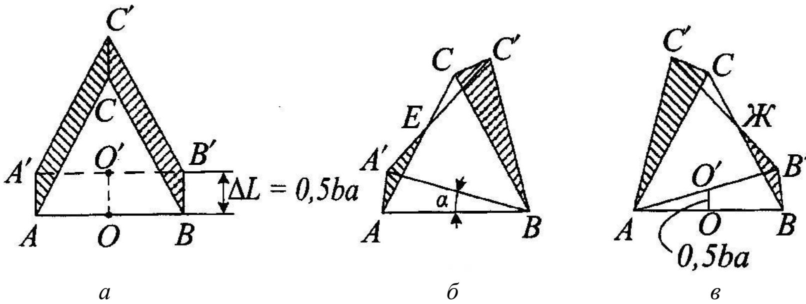


Рис. 3. Возможные перемещения вездехода при минимизации шага: *а* – движение прямо; *б* – движение вправо при повороте вокруг точки *B*; *в* – движение влево при повороте вокруг точки *A*

4*

Для возможности движения как влево, так и вправо (рис.4, *а*) свободная площадь должна быть:

$$2(S_{\Delta ACC'} + 2S_{\Delta AA'H}) = 2\left(\frac{b_0^2\alpha}{2} + 2(b_0\alpha)^2\frac{\sqrt{3}}{8}\right) = b_0^2\alpha\left(1 + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right).$$

Для движения вправо и вперед (рис.4, *б*) необходимо с незначительной погрешностью отсутствие деревьев на площади:

$$S_{AA'C'C} + (S_{OBDC'} - S_{OBC}) = \frac{b}{2}\frac{b_0\alpha}{2} + \left(\frac{b_0\sqrt{3}+b\alpha}{4}\right)\left(b_0 - \frac{(b_0\sqrt{3}+b\alpha)-\alpha\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+\alpha)}\right).$$

Данную площадь можно приближенно определить по формуле

$$\frac{bb_0\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\left(b_0 + \frac{b\alpha}{2}\right)^2 \approx bb_0\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{8}\right).$$

Такая же площадь необходима для движения влево и вперед.

Для движения в любую сторону (рис.4, *в*) необходима следующая свободная площадь:

$$2S_{BCC'D} = 2bb_0\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{8}\right).$$

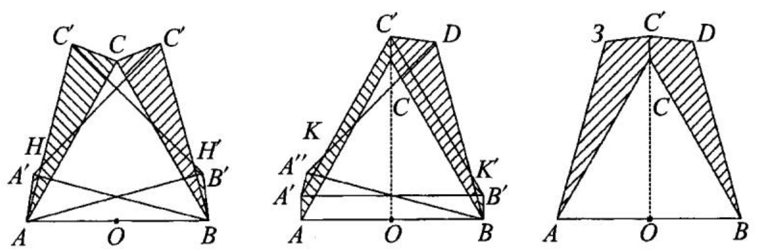
По формуле вероятности суммы совместных событий:

$P(\Delta L = 0{,}5b\alpha) = P(\text{вп}) + P(\text{л}) + P(\text{пр}) - [P(\text{л, пр}) + P(\text{вп, пр}) + P(\text{вп, л})] + P_{\text{общ}}$

или по формуле (1)

$$P(\Delta L = 0{,}5b\alpha) = 2e^{-0{,}5b_0^2\alpha\left(\frac{1+3\alpha\sqrt{3}}{1+\alpha\sqrt{3}}\right)\rho} + e^{-0{,}5bb_0\alpha\rho} + e^{-2bb_0\alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{8}\right)\rho} -$$

$$-2e^{-bb_0\alpha\rho\left(1{,}25+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{8}\right)} - e^{-b_0^2\alpha\left(1+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)\rho}. \qquad (6)$$



а *б* *в*

Рис. 4. Площади, на которых должны отсутствовать препятствия при минимизации шага и сочетании движений: *а* – при движении влево и вправо; *б* – при движении вправо и вперед (или влево и вперед); *в* – при движении вправо, влево и вперед

Обозначив $d = e^{-bb_0\alpha\rho}$, получим более кратко:

$$P(\Delta L = 0{,}5b\alpha) = 2d^{\frac{0{,}5b_0}{b}\left(\frac{1+3\alpha\sqrt{3}}{1+\alpha\sqrt{3}}\right)} + d^{0{,}5} + d^{2+\alpha+0{,}25\alpha^2} -$$

$$-2d^{1{,}25+0{,}5\alpha+0{,}125\alpha^2} - d^{\frac{b_0}{b}\left(1+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

Для перемещения на $\Delta L = L$ необходимо сделать $n = \dfrac{L}{0{,}5b\alpha} = \dfrac{2L}{b\alpha}$ шагов. Вероятность, что на каждом шаге движение возможно:

$$P_0(\Delta L = L) = \left[P(\Delta L = 0{,}5b\alpha)\right]^{\frac{2L}{b\alpha}}. \qquad (7)$$

При малых значениях $\rho = \dfrac{N}{S_0}$ также справедлива формула для приближенного вычисления вероятности продвижения на $0{,}5b\alpha$, однако возведение в большую степень опасно накоплением погрешности.

П р и м е р 3. Пусть $b = b_0 = 2$ м, $L = 50$ м, $\alpha = 0{,}1 \approx 5{,}7$ °. Тогда $bb_0\alpha\rho = 0{,}04$ при плотности $\rho = 0{,}1$.

$$P(\Delta L = 0{,}1\text{ м}) = 2e^{-0{,}02\cdot1{,}2953} + e^{-0{,}04\cdot0{,}5} + e^{-0{,}04\cdot2{,}1025} - 2e^{-0{,}04\cdot1{,}3013} - e^{-0{,}04\cdot1{,}0866} =$$

$$= 2e^{-0{,}025906} + e^{-0{,}02} + e^{-0{,}0841} - 2e^{-0{,}052052} - e^{-0{,}043464} \approx$$

$$\approx 1 - (2\cdot0{,}0259 + 0{,}02 + 0{,}0841 - 2\cdot0{,}052 - 0{,}0435) + 0{,}5\cdot(2\cdot0{,}0259^2 +$$

$$+ 0{,}02^2 + 0{,}0841^2 - 2\cdot0{,}052^2 - 0{,}0435^2) \approx 1 - 0{,}0084 + 0{,}00076 \approx 0{,}9924.$$

Тогда $P(\Delta L = 50\text{ м}) \approx (0{,}9924)^{500} \approx e^{-0{,}0076\cdot500} = e^{-3{,}8} \approx 0{,}0224$.

При шаге $0{,}5b$ вероятность составляет 0,015 (пример 1), следовательно, с уменьшением шага вероятность преодоления лесистой местности хотя и повышается, но ее абсолютное значение недостаточно, чтобы рекомендовать такой способ преодоления препятствия.

Хабаровский государственный
технический университет

Поступила 26.05.03

N.A. Ivanov, E.A. Myasnikov

Maneuverability Assessment of Three-wheeled Landrover in Woodland

The results of theoretical research are presented regarding the probability of overcoming woodland by light three-wheeled landrover on low-pressure tires.