

УДК 674.093:658.567

## РАСЧЕТ ОБЪЕМА ОПИЛОК ПРИ РАСКРОЕ БРЕВНА

© *И.В. Архипов, магистр*

*В.А. Кузнецов, д-р техн. наук, проф.*

Петрозаводский государственный университет, пр. Ленина, 33, г. Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910; e-mail: alien\_aria@mail.ru;  
e-mail: kuznetcv@mail.ru

Рациональное использование природных ресурсов – важный фактор экономического успеха современных предприятий. В значительной мере это относится и к лесопильным предприятиям лесопромышленного комплекса России. Цель процесса лесопиления состоит в получении пиломатериалов различного назначения и технологической щепы из круглых лесоматериалов. При оптимизации распила древесины необходимо учитывать все продукты лесопиления, в том числе щепу и опилки. В работе были поставлены задачи расчета объема опилок при распиле бревна, которое моделируется в виде цилиндра, усеченного конуса и параболоида вращения. Для решения этих задач использованы методы математического анализа и аналитической геометрии, которые были реализованы в виде специального программного модуля. В моделях учтены развальный и брусово-развальный способы распила, которые востребованы на всех современных линиях лесопиления. Учтена также различная толщина пропила при первом и втором проходах. Несмотря на то, что модель бревна в виде параболоида вращения сложнее и точнее, чем в виде усеченного конуса, на ее основе получены более простые формулы для расчета объема пропила, что важно, поскольку расчет объема опилок выполняется для каждого постава в генераторе поставов. Предложенные для расчета объемов опилок формулы используются в системе планирования лесопильного производства, в качестве базовой выбрана модель в виде параболоида вращения. Формулы дают более точные результаты по сравнению с используемыми на предприятии, погрешность вычисления которых составляет более 1...2 %.

*Ключевые слова:* распил бревен, объем опилок, оптимизация, параболоид вращения, расчет интегралов.

### *Введение*

Задача расчета объема опилок возникла при разработке системы планирования лесопильного производства [1–3, 9]. Хотя опилки считаются одним из наименее востребованных продуктов, полученных в процессе лесопиления. Знать их объем для различных поставов необходимо при расчете ожидаемого объема технологической щепы.

По желанию заказчика, при реализации системы оптимального планирования производства [6, 7] ограничение на объем опилок может быть включено в ограничения задачи, что отсутствует в других системах оптимального раскроя пиломатериалов.

Поскольку постав включает в себя несколько пропилов, суммарный объем опилок складывается из объема опилок для каждого пропила. Это используется в расчетах, которые будут варьироваться в зависимости от модели бревна. Рассмотрим модели бревна в виде цилиндра, усеченного конуса и параболоида вращения.

Введем общие обозначения:  $r$  – радиус вершинного торца бревна,  $R$  – радиус комлевого торца бревна,  $L$  – длина бревна.

Пусть пропил расположен на расстоянии от  $x_1$  до  $x_2$  от осевой линии центральной симметрии бревна (рис. 1). Тогда, полагая площадь сечения бревна в т.  $x$  как  $S(x)$ , объем пропила

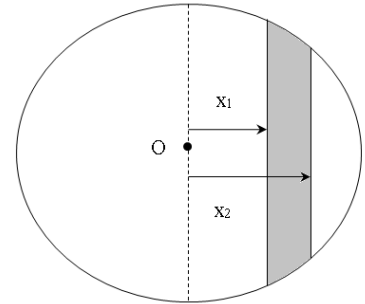


Рис. 1. Графическое представление пропила в цилиндре

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x) dx.$$

*Модель объекта раскря в виде цилиндра*

В этом случае  $r = R$ , тогда сечение будет представлять собой прямоугольник со сторонами  $2\sqrt{R^2 - x^2}$  и  $L$ . Таким образом, объем пропила

$$V = 2L \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Найдем

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} dx = \begin{cases} x = R \sin t, \\ dx = R \cos t \end{cases} = \int \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} R \cos t dt = \frac{R^2}{2} (t + \sin t \cos t).$$

Подставляя  $t = \arcsin \frac{x}{R}$  и учитывая, что  $\cos(\arcsin t) = \sqrt{1 - t^2}$ , получаем

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{R^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \right) = \frac{1}{2} \left( R^2 \arcsin \frac{x}{R} + x \sqrt{R^2 - x^2} \right). \quad (1)$$

Таким образом,

$$V = L \left( R^2 \left( \arcsin \frac{x_2}{R} - \arcsin \frac{x_1}{R} \right) + x_2 \sqrt{R^2 - x_2^2} - x_1 \sqrt{R^2 - x_1^2} \right).$$

*Модель объекта раскроя в виде усеченного конуса*

Для расчета объема опилок, полученного при использовании технологии распила брусковой, рассмотрим дополнительное условие: необходимо найти объем фигуры, ограниченной усеченным конусом, плоскостями пропила, а также плоскостями пропила двухкантного бруса шириной  $2W$  (рис. 2).

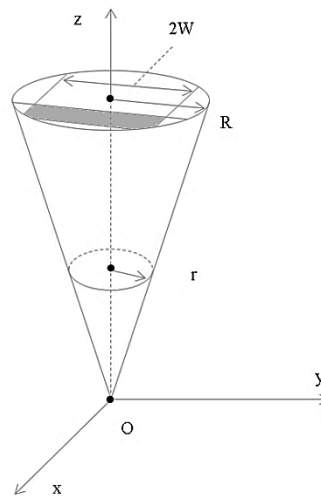


Рис. 2. Графическое представление пропила в усеченном конусе (серым цветом выделено начало пропила)

Сечение представляет собой фигуру, которая сверху и снизу ограничена отрезками, по бокам – гиперболами, а в случае, когда пропил двухкантного бруса пересекается с искомым пропилом, – еще и отрезками по бокам.

Для расчета площади сечения воспользуемся следующей формулой:

$$S = S_1 - S_2,$$

где  $S_1$  – площадь сечения до верхнего основания конуса;

$S_2$  – площадь сечения от нижнего основания конуса (рис. 3).

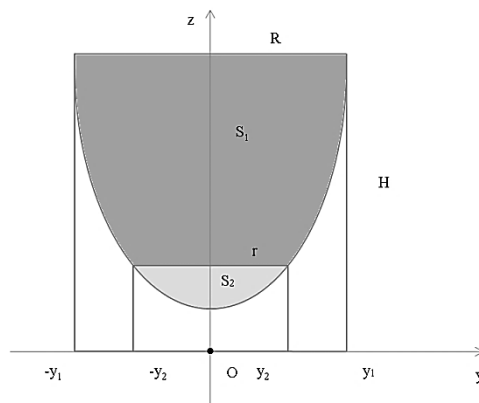


Рис. 3. Площадь сечения усеченного конуса (двухкантный брус для простоты не изображен)

Воспользуемся следующей формулой для расчета поверхности конуса [5]:

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

Найдем параметр  $a$  – угол наклона образующей конуса к его оси.

Обозначим  $z_1$  – аппликата точки пересечения нижнего основания усеченного конуса с осью  $Oz$ . Подставим в уравнение поверхности конуса точки  $(r, 0, z_1)$  и  $(R, 0, z_1 + L)$ :

$$r^2 = a^2 z_1^2; R^2 = a^2(z_1 + L)^2.$$

Из первого уравнения следует, что  $z_1 = \frac{r}{a}$ . Подставим данное выражение во второе уравнение:

$$a = \frac{R-r}{L}.$$

Отсюда высота полного конуса  $H$ , эквивалентная  $z_1 + L$ :

$$H = z_1 + L = \frac{r}{a} + L = \frac{rL}{R-r} + L = \frac{RL}{R-r}.$$

Зафиксируем  $x = b$  и найдем площадь сечения в данной точке. Заметим, что при  $x = b$  значения  $y$  будут меняться в диапазоне  $[-y_1, y_1]$ , где  $y_1 = \max\{\sqrt{R^2 - b^2}, W\}$ .

Из формулы площади поверхности следует, что

$$z = \frac{\sqrt{y^2 + b^2}}{a}.$$

Тогда искомая площадь (рис. 4)

$$S = 2Hy_1 - \frac{2}{a} \int_0^{y_1} \sqrt{y^2 + b^2} dy,$$

поскольку  $2Hy_1$  – площадь прямоугольника, а интеграл – это площадь под линией, являющейся пересечением конуса и плоскости  $x = b$ . В связи с тем, что конус является симметричной фигурой, интеграл можно рассматривать не на всем промежутке  $[-y_1, y_1]$ , а на его положительной части  $[0, y_1]$ .

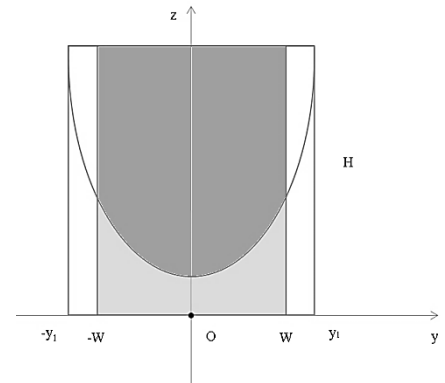


Рис. 4. Площадь сечения конуса (изображено с учетом двухкантного бруса)

Выполнив подстановку и воспользовавшись формулой интегрирования по частям, после некоторых преобразований получим [4, 8]:

$$\int \sqrt{y^2 + b^2} dy = \frac{1}{2} \left( y\sqrt{y^2 + b^2} + b^2 \log \left( y + \sqrt{y^2 + b^2} \right) \right).$$

Таким образом, площадь сечения

$$S = 2Hy_1 - \frac{L}{R-r} \left( y_1\sqrt{y_1^2 + b^2} + b^2 \log \left( y_1 + \sqrt{y_1^2 + b^2} \right) - b^2 \log b \right).$$

Найдем объем искомого пропила, когда известна функция площади сечения  $S(x)$  (вернемся к  $b = x$ ).

Рассмотрим два случая, когда  $\sqrt{R^2 - x^2} \geq W$ : при  $x \leq \sqrt{R^2 - W^2}$  и при  $x > \sqrt{R^2 - W^2}$ . В первом случае  $y_1 = W$ , во втором  $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Если пропил попадает в оба случая, т. е. когда  $\sqrt{R^2 - W^2}$  попадает в интервал  $[x_1, x_2]$ , разбиваем пропил на две части и считаем каждую отдельно.

1. Первый случай ( $x \leq \sqrt{R^2 - W^2}$ ):

$$S = 2HW - \frac{L}{R-r} \left( W\sqrt{W^2 + x^2} + x^2 \log \left( W + \sqrt{W^2 + x^2} \right) - x^2 \log x \right);$$

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x) dx = 2HW(x_2 - x_1) -$$

$$- \frac{L}{R-r} \left( W \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{W^2 + x^2} dx + \int_{x_1}^{x_2} x^2 \log \left( W + \sqrt{W^2 + x^2} \right) dx - \int_{x_1}^{x_2} x^2 \log x dx \right).$$

Не будем приводить расчет данных интегралов в связи с громоздкостью вычислений и результата.

2. Второй случай ( $x > \sqrt{R^2 - W^2}$ ):

$$S = 2H\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{L}{R-r} \left( x^2 \log \left( R + \sqrt{R^2 - x^2} \right) - x^2 \log x \right);$$

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( H\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{L}{R-r} \left( x^2 \log \left( R + \sqrt{R^2 - x^2} \right) - x^2 \log x \right) \right) dx.$$

Как и в первом случае, не будем приводить расчет данных интегралов в связи с громоздкостью вычислений и результата.

*Модель объекта раскроя  
в виде усеченного эллиптического параболоида вращения*

Графические схемы в данном случае будут похожи на схемы усеченного конуса, однако формулы будут отличаться.

Запишем формулу поверхности параболоида вращения [5]:

$$x_2 + y_2 = a_2 z.$$

Найдем параметр  $a$ .

Обозначим  $z_1$  – аппликата точки пересечения нижнего основания усеченного параболоида с осью  $Oz$ . Подставим в уравнение поверхности параболоида точки  $(r, 0, z_1)$  и  $(R, 0, z_1 + L)$ :

$$r^2 = a^2 z_1, R^2 = a^2(z_1 + L).$$

Из первого уравнения следует, что  $z_1 = \left(\frac{r}{a}\right)^2$ . Подставим данное выражение во второе уравнение:

$$R^2 = a^2 \left( \left(\frac{r}{a}\right)^2 + L \right) = r^2 + a^2 L.$$

Получим

$$a^2 = \frac{R^2 - r^2}{L}.$$

Отсюда следует, что высота полного параболоида, эквивалентная  $z_1 + L$ ,

$$H = z_1 + L = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + L = \frac{r^2 L}{R^2 - r^2} + L = \frac{R^2 L}{R^2 - r^2}.$$

Зафиксируем  $x = b$  и найдем площадь сечения в данной точке. Заметим, что при  $x = b$  значения  $y$  будут меняться в диапазоне  $[-y_1, y_1]$ , где  $y_1 = \max\{\sqrt{R^2 - b^2}, W\}$ .

Из формулы площади поверхности следует, что

$$z = \frac{y^2 + b^2}{a^2}.$$

Тогда искомая площадь

$$S = 2Hy_1 - \frac{2}{a^2} \int_0^{y_1} (y^2 + b^2) dy.$$

Обоснование этой площади аналогично обоснованию формулы усеченного конуса, которое было приведено ранее:

$$\int_0^{y_1} (y^2 + b^2) dy = \frac{y^3}{3} + b^2 y \Big|_{y_1}^0 = \frac{y_1^3}{3} + b^2 y_1.$$

Найдем объем искомого пропила, когда известна функция площади сечения  $S(x)$  (вернемся к  $b = x$ ).

По аналогии с конусом рассмотрим два случая, когда  $\sqrt{R^2 - x^2} \geq W$ .

В первом случае, когда  $x \leq \sqrt{R^2 - W^2}$ , имеем  $y_1 = W$ , во втором, когда  $x > \sqrt{R^2 - W^2}$ , имеем  $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Если пропил попадает в оба случая, т. е. когда  $\sqrt{R^2 - W^2}$  попадает в интервал  $[x_1, x_2]$ , разбиваем пропил на 2 части и считаем каждую отдельно.

1. Первый случай ( $x \leq \sqrt{R^2 - W^2}$ ):

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \left( 2HW - \frac{2}{a^2} \left( \frac{W^3}{3} + Wx^2 \right) \right) dx = \frac{2W}{3a^2} (3R^2x - W^2x - x^3) \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

2. Второй случай ( $x > \sqrt{R^2 - W^2}$ ):

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \left( 2H\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2}{a^2} \left( \frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + x^2\sqrt{R^2 - x^2} \right) \right) dx.$$

Первое слагаемое рассчитываем по формуле (1), для остальных не будем приводить промежуточные расчеты ввиду громоздкости вычислений, а запишем лишь конечный результат [10]:

$$\frac{1}{3} \int (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{24} \left( x(5R^2 - 2x^2)\sqrt{R^2 - x^2} + 3R^4 \arcsin \frac{x}{R} \right);$$

$$\int x^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{1}{8} \left( x(-R^2 + 2x^2)\sqrt{R^2 - x^2} + R^4 \arcsin \frac{x}{R} \right).$$

Группируя слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{R^4}{4} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{24} \sqrt{R^2 - x^2} (5R^2 - 2x^2 - 3R^2 + 6x^2) = \\ & = \frac{R^4}{4} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{12} \sqrt{R^2 - x^2} (R^2 + 2x^2). \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в исходную формулу для объема пропила:

$$\begin{aligned} V = & 2H \frac{1}{2} \left( R^2 \arcsin \frac{x}{R} + x\sqrt{R^2 - x^2} \right) - \\ & - \frac{2}{a^2} \left( \frac{R^4}{4} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{12} \sqrt{R^2 - x^2} (R^2 + 2x^2) \right) \Big|_{x_1}^{x_2}. \end{aligned}$$

Группируя слагаемые относительно  $\arcsin$  и  $x\sqrt{R^2 - x^2}$  и учитывая, что  $a^2 = \frac{R^2 - r^2}{L}$ , имеем следующее:

$$\begin{aligned} & \arcsin \frac{x}{R} \left( HR^2 - \frac{R^4}{2a^2} \right) + x\sqrt{R^2 - x^2} \left( H - \frac{1}{6a^2} (R^2 + 2x^2) \right) = \\ & = \arcsin \frac{x}{R} \left( HR^2 - \frac{HR^2}{2} \right) + x\sqrt{R^2 - x^2} \left( H - \frac{H}{6} - \frac{x^2}{3a^2} \right) = \\ & = \frac{HR^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} + x\sqrt{R^2 - x^2} \left( \frac{5H}{6} - \frac{x^2}{3a^2} \right). \end{aligned}$$

Для получения формулы площади сечения для усеченного параболоида, необходимо вычесть из площади полного параболоида площадь параболоида, ограниченного плоскостью  $z = r$ .

#### Выводы

1. В работе представлены формулы для расчета объема опилок для разных моделей бревна. Хотя модель бревна в виде параболоида вращения сложнее и точнее, чем в виде усеченного конуса, получены более простые формулы для расчета объема пропила, что важно, поскольку расчет объема опилок выполняется для каждого постава в генераторе поставов.
2. Расчеты используются в системе планирования лесопильного производства, в качестве модели была выбрана модель в виде параболоида вращения.
3. Формулы дают более точный результат для расчета объема опилок по сравнению с используемыми на предприятии, погрешность вычисления которых составляет более 1...2 %.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов И.В.* Математические модели раскрытия лесосырья в задачах планирования и управления лесопильным производством // Учен. зап. Петр. ГУ. 2013. Вып. 8(137). С. 93–97.
2. *Архипов И.В.* Математические модели и опыт реализации системы планирования раскрытия лесосырья // Вестн. СПбГУ. 2014. Сер. 10, вып. 3. С. 82–92.
3. *Воронин А.В., Кузнецов В.А., Шаббаев А.И., Архипов И.В., Кашевник А.М.* Разработка и реализация системы планирования лесопильным производством // Тр. СПИИРАН. 2012. С. 400–415.
4. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х.* Математический анализ. 2-е изд., перераб. М.: Изд-во МГУ, 1985. Ч.1. 662 с.
5. *Погорелов А.В.* Аналитическая геометрия. 3-е изд. М.: Наука, 1968. 176 с.



6. Урбан А.Р., Кузнецов В.А. Математические модели и методы учета сроков продукции в задаче раскроя тамбуров бумагоделательных машин // Учен. зап. ПетрГУ. 2014. Вып. 4 (141). С. 112–115.

7. Урбан А.Р. Решение задачи поиска оптимального столбца в условиях оптимального раскроя бумажного полотна // Вестн. СПбГУ. 2014. Сер. 10, вып. 4. С. 71–81.

8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. 6-е изд. М.: Наука, 1968. Т. 1. 422 с.

9. Шабаетов А.И., Косицын Д.П., Шабалина И.М., Архипов И.В., Анапасик Ю.А. «Облачные» сервисы оптимального планирования для предприятий ЦБП и ЛПК // Автоматизация в пром-сти. 2013. № 4. С. 19–24.

10. A Wolfram Research Company Wolfram Alpha's knowledge base. A Wolfram Research Company. URL: <http://www.wolframalpha.com>

Поступила 01.07.14

UDC 674.093:658.567

### Calculation of Total Sawdust Volume After a Log Sawing

*I. V. Arhipov, Master*

*V.A. Kuznetsov, Doctor of Engineering, Professor*

Petrozavodsk State University, Lenina, 33, Petrozavodsk, Republic of Karelia, , 185910, Russia; e-mail: [alien\\_aria@mail.ru](mailto:alien_aria@mail.ru); e-mail: [kuznetcv@mail.ru](mailto:kuznetcv@mail.ru)

Rational use of nature resources is important factor of economic success of modern enterprises. Substantially it belongs to the sawing enterprises, the most characteristic for timber industry complex of Russia. The aim of the sawing process consists in processing round wood into sawn lumber, as well as technological wood chips. By optimization of wood sawing it is necessary to consider all products of sawmilling, including technological chip and sawdust. In work problems of calculation of sawdust volume during the log sawing were defined, in a case when the log is modeled in the form of the cylinder, the truncated cone and a rotation paraboloid. For their solution it was used methods of the mathematical analysis and analytical geometry which were implemented in the form of the special program module. As a way of a log sawing in models were considered split-method, and also brick and split-method, that meets requirements of all modern lines of sawmilling. Also various thickness is considered during sawing at the first and at the second pass at log sawing. It should be noted that in spite of the fact that the log model in the form of a rotation paraboloid is more difficult and more exact, than in the form of the truncated cone, a formula for calculation of volume of saw dust turned out simpler that is important as calculation of sawdust volume is carried out for everyone a sawing schedule in the sawing schedule generator. The received calculations are used in system of planning of sawing production, as model the model in the form of a rotation paraboloid was chosen. Formulas yield more exact result for calculation of sawdust volume in comparison with used at the enterprise which error of calculation makes more 1-2%.

*Keywords:* log sawing, amount of dust, optimization, paraboloid of revolution, calculations of integrals.

REFERENCES

1. Arkhipov I. V. *Matematicheskie modeli raskroya lesosyr'ya v zadachakh planirovaniya i upravleniya lesopil'nyim proizvodstvom* [Mathematical Models of Wood Sawing in Tasks of Sawmill Planning and Managing]. 2013, vol. 8(137), pp. 93–97.
2. Arkhipov I.V. *Matematicheskie modeli i opyt realizatsii sistemy planirovaniya raskroya lesosyr'ya* [Mathematical Models and Experience of Implementation of Sawmill Planning System]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*, 2014, vol. 3, pp. 82–92.
3. Voronin A.V., Kuznetsov V.A., Shabaev A.I., Arkhipov I.V., Kashevnik A.M. *Razrabotka i realizatsiya sistemy planirovaniya lesopil'nyim proizvodstvom* [Development and Implementation of Sawmill Planning System]. St. Petersburg, 2012, pp. 400–415.
4. Il'in V.A., Sadovnichiy V.A., Sendov B.I.Kh. *Matematicheskiy analiz* [Mathematical Analysis]. Moscow, 1985. 662 p.
5. Pogorelov A.V. *Analiticheskaya geometriya* [Analytics Geometry]. Moscow, 1968. 176 p.
6. Urban A.R., Kuznetsov V.A. *Matematicheskie modeli i metody ucheta srokov produktssii v zadache raskroya tamburov bumagodelatel'nykh mashin* [Mathematical Models and Methods of the Accounting of Production Terms in a Sawing Problem of Tambours of Paper Machines]. *Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta* [Memoir of Petrozavodsk State University]. 2014, vol. 4 (141), pp. 112–115.
7. Urban A.R. *Reshenie zadachi poiska optimal'nogo stolbtsa v usloviyakh optimal'nogo raskroya bumazhnogo polotna* [Solution of the Problem of Finding the Optimal Column in Conditions of Optimal Cutting the Huckaback]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*, 2014, vol. 4, pp. 71–81.
8. Fikhtengol'ts G.M. *Osnovy matematicheskogo analiza* [Basics of Mathematical Analyses]. Moscow, 1968, vol. 1, 422 p.
9. Shabaev A.I., Kositsyn D.P., Shabalina I.M., Arkhipov I.V., Apanasik Yu.A. *«Ob-lachnyye» servisy optimal'nogo planirovaniya dlya predpriyatiy TsBP i LPK* [«Cloud» Services of Optimal Planning for Pulp and Paper Industry and for Wood Processing Industry]. Moscow, 2013, no. 4, pp. 19–24.
10. A Wolfram Research Company *Wolfram Alpha's knowledge base*. Available at: <http://www.wolframalpha.com>

Received on July, 01, 2014