

УДК 676.056.42

А.Б. Коновалов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПРЕССОВАНИЯ БУМАЖНОГО ПОЛОТНА В ПРЕССАХ БУМАГОДЕЛАТЕЛЬНЫХ МАШИН

Предложена математическая модель прессования бумажного полотна, рассматриваемого как трехкомпонентная система, состоящая из воды, воздуха и волокон целлюлозы; получена система из двух уравнений, описывающих обезвоживание бумажного полотна под действием внешней переменной нагрузки.

Ключевые слова: прессование, бумажное полотно, сухость, давление.

При производстве бумаги особую роль играют процессы удаления из влажного полотна воды. Эти процессы происходят в сеточной, прессовой и сушильной частях бумагоделательных машин. Основная часть воды удаляется в сеточной части. Однако к концу сеточной части полотно содержит еще значительное количество воды, удерживаемой капиллярными силами, а также некоторое количество свободной воды, которая не могла быть удалена в сеточной части из-за недостаточного разрежения и непродолжительного действия вакуума. Для большинства видов бумаги и картона сухость после сеточной части составляет около 20 %.

Дальнейшее обезвоживание бумажного полотна происходит в прессовой части машины под действием внешней нагрузки. При этом удаляется в основном свободная вода, что ведет к значительному увеличению числа контактов между волокнами. В результате возрастают сухость, прочность и плотность полотна. От эффективности работы прессовой части зависят затраты на сушку бумаги и производительность машины. С целью сократить расход пара на сушку стремятся получить после прессовой части максимально возможную сухость. Однако повышение сухости за счет увеличения давления между прессовыми валами приводит к увеличению затрат энергии на привод валов, что может не компенсироваться снижением затрат на сушку. Кроме того, чрезмерное прессование может ухудшить потребительские свойства вырабатываемой на машине продукции.

Представим бумажное полотно как пористую среду, в которой помимо твердой фазы, образованной целлюлозными волокнами, имеется система пустот – пор. Будем различать внешнее и внутреннее поровое пространство. Внешнее поровое пространство образовано системой пор, находящихся вне целлюлозных волокон, и заполнено водой и воздухом, которые в процессе сжатия бумажного полотна в прессовом захвате удаляются в прессовое сукно. Внутреннее поровое пространство образуют поры, находящиеся внутри волокон.

При построении математической модели будем считать, что количество воды, находящейся внутри волокон, в процессе механического уплотнения бумажного полотна остается неизменным. Поэтому внешнее поровое пространство будем называть активным, а внутреннее – неактивным. Сжимаемостью воды и целлюлозы пренебрегаем. В соответствии с этими предположениями объем бумажного полотна V складывается из объема воды V_1^a и объема воздуха V_2 во внешнем поровом пространстве, объема волокон V_3 и объема воды, находящейся внутри волокон V_1^n :

$$V = V_1^a + V_1^n + V_2 + V_3.$$

Введем коэффициент активной пористости ε и предельный коэффициент пористости ε_{lim} :

$$\varepsilon = \frac{V_1^a + V_2}{V_1^n + V_3}; \quad \varepsilon_{\text{lim}} = \frac{V_1^n}{V_3}.$$

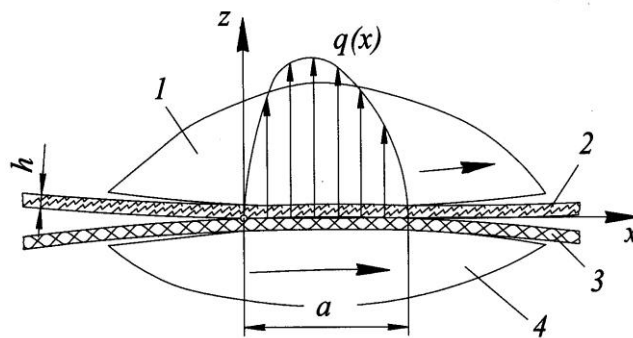


Рис. 1. Схема прессового захвата: 1 – верхний вал;
2 – бумажное полотно; 3 – прессовое сукно;
4 – нижний вал

Прессование бумажного полотна происходит в прессовом захвате, образуемом двумя валами. Процесс характеризуется законом распределения внешнего давления $q(x)$ по ширине a площадки контакта валов (рис. 1).

Поскольку радиус прессовых валов значительно больше толщины бумажного полотна, то будем пренебрегать кривизной площадки контакта. Учитывая, что проницаемость бумажного полотна в машинном направлении (вдоль оси x) меньше, чем в направлении оси z , и пренебрегая фазовыми переходами, прессование бумажного полотна будем рассматривать как одномерное движение трехкомпонентной среды под действием внешней, изменяющейся во времени, сжимающей нагрузки.

В процессе прессования бумажного полотна одновременно с течением воды и воздуха через его волокнистый «скелет» происходит деформирование и самого скелета. Поэтому для описания течения воды и воздуха необходимо использовать закон Дарси–Герсеванова:

$$u_1 - u_3 = \frac{k_1}{\mu_1 \varphi m} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad (1)$$

$$u_2 - u_3 = \frac{k_2}{\mu_2 (1 - \varphi) m} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (2)$$

где u_1, u_2, u_3 – соответственно скорость воды, воздуха и волокон, отнесенная к занимаемым ими площадям рассматриваемого сечения;

φ – водонасыщенность (отношение объема активного порового пространства, занятого водой ко всему объему активного порового пространства);

m – активная пористость, $m = \varepsilon / (1 + \varepsilon)$.

Перемещение верхней границы бумажного полотна затрудняет формулировку граничных условий. Поэтому целесообразно формулировать задачу с использованием лагранжевой массовой координаты. Выделим двумя горизонтальными плоскостями, которые перемещаются со скоростями, рав-

(2)

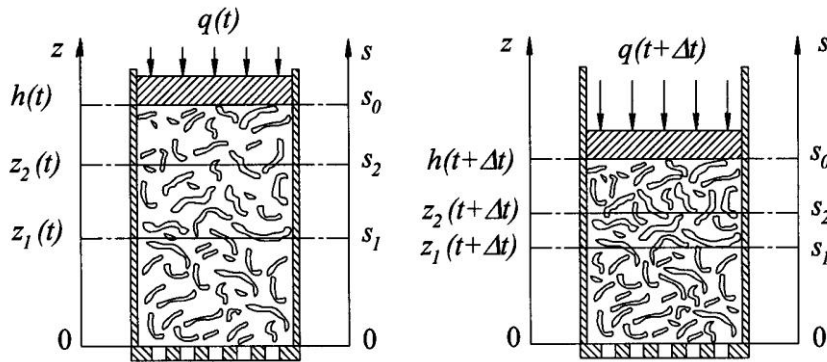


Рис. 2. Схема, поясняющая методику расчета

ными скоростям волокон скелета, элементарный слой бумажного полотна, представляющий собой параллелепипед высотой dz и площадью в основании, равной 1. В процессе уплотнения толщина элементарного слоя dz будет изменяться, но масса волокон в нем будет оставаться постоянной и равной ее начальной (до приложения внешней нагрузки) величине. Таким образом, эйлеровы координаты z верхней и нижней плоскостей в моменты времени t и $t + \Delta t$ будут разными, а массовые координаты s одинаковыми (рис. 2).

Массовая координата s связана с координатой z соотношением

$$s = \int_0^z \frac{\rho_3}{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_{lim})} dz,$$

где ρ_3 – плотность волокон скелета.

Массовая координата верхней границы бумажного полотна равна массе 1 м^2 воздушно-сухого бумажного полотна s_0 .

Так как

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\rho_3}{\mu_1 \phi (1 + \varepsilon) + \varepsilon_{lim}}$$

то уравнения (1) и (2) могут быть записаны следующим образом:

$$\bar{u}_1 = \frac{k_1 \rho_3}{\mu_1 \phi (1 + \varepsilon) + \varepsilon_{lim}} \frac{\partial p}{\partial s}; \quad (3)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{k_2 \rho_3}{\mu_2 (1 - \phi) + \varepsilon + \varepsilon_{lim}} \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (4)$$

где \bar{u}_1 , \bar{u}_2 – скорости воды и воздуха относительно волокон скелета.

Рассматриваемый элементарный слой содержит массу волокна ds . Масса воды, находящейся в активном поровом пространстве, составит

$$dM_1 = \varepsilon \phi (1 + \varepsilon_{lim}) \frac{\rho_1}{\rho_3} ds,$$

масса воздуха

$$dM_2 = \varepsilon (1 - \phi) (1 + \varepsilon_{lim}) \frac{\rho_2}{\rho_3} ds.$$

За промежуток времени dt из рассматриваемого слоя через его нижнюю границу уходит масса воды, равная $\rho_1 \bar{u}_1 m \phi dt$, а через верхнюю границу поступает масса воды, равная $\rho_1 \left(\bar{u}_1 m \phi + \frac{\partial}{\partial s} (\mu_1 m \phi) ds \right) dt$.

Таким образом, за промежуток времени dt в рассматриваемом слое увеличение массы воды составит

$$\frac{\partial}{\partial s} (\mu_1 \bar{u}_1 m \phi) ds dt = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k_1 \rho_1 \rho_3}{\mu_1 (1 + \varepsilon) + \varepsilon_{lim}} \frac{\partial p}{\partial s} \right) ds dt. \quad (5)$$

С другой стороны, это увеличение будет равно

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon (1 + \varepsilon_{lim}) \phi \frac{\rho_1}{\rho_3} ds \right) dt. \quad (6)$$

Приравняв выражения (5) и (6), получим уравнение, описывающее течение воды в бумажном полотне:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \phi \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k_1 \rho_1 \rho_3}{\mu_1 (1 + \varepsilon) + \varepsilon_{lim}} \frac{\partial p}{\partial s} \right). \quad (7)$$

Аналогичным образом можно получить уравнение для воздуха:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon (1 - \phi) \frac{\rho_2}{\rho_3} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k_2 \rho_2 \rho_3}{\mu_2 (1 - \phi) + \varepsilon + \varepsilon_{lim}} \frac{\partial p}{\partial s} \right). \quad (8)$$

При преобразовании этих уравнений к более удобному для решения виду воспользуемся фильтрационно-компрессионными характеристиками бумажного полотна и уравнением состояния воздуха. Коэффициент порис-

тости зависит от эффективных напряжений в скелете бумажного полотна. Эту зависимость, называемую компрессионной характеристикой бумажного полотна, можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\alpha \sigma}.$$

Решение поставленной задачи осложняется еще тем, что бумажное полотно не является абсолютно упругим материалом и при полном снятии внешней нагрузки восстанавливается не полностью. Примем, что разгрузка бумажного полотна, которая начинается при уменьшении эффективного напряжения, описывается уравнением

$$\varepsilon = \varepsilon_0^* e^{-\alpha^* \sigma}.$$

Параметры разгрузочной кривой:

$$\alpha^* = a \left(\frac{\varepsilon_{\min}}{\varepsilon_0} \right)^r; \quad \varepsilon_0^* = \varepsilon_{\min} e^{\alpha \sigma_{\max}}; \quad \varepsilon_{\min} = \varepsilon_0 e^{-\alpha \sigma_{\max}},$$

где r – опытный коэффициент, характеризующий компрессионные свойства бумажного полотна при снятии нагрузки;

σ_{\max} – максимальное эффективное напряжение, достигаемое в данной точке бумажного полотна на стадии нагрузки.

Проницаемость бумажного полотна для воды и воздуха может быть представлена в виде

$$k_i = k_a k_{\phi i}, \quad i = 1, 2,$$

где k_a – абсолютная проницаемость бумажного полотна;

$k_{\phi 1}, k_{\phi 2}$ – относительные фазовые проницаемости бумажного полотна соответственно для воды и воздуха.

Абсолютная проницаемость зависит только от пористости бумажного полотна:

$$k_0 = k_a \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^n.$$

Здесь k_0, ε_0 – абсолютная проницаемость и коэффициент пористости бумажного полотна перед прессованием;

n – опытный коэффициент.

Относительные фазовые проницаемости зависят от насыщенности пор соответствующими компонентами и могут быть представлены в виде

$$k_{\phi i} = \left(\frac{\varphi_i - \varphi_{\text{кpi}}}{1 - \varphi_{\text{кpi}}} \right)^{3,5}, \quad i = 1, 2,$$

где $\varphi_{\text{кpi}}$ – критическая насыщенность материала i -й фазой, т. е. такая насыщенность i -й фазы, при которой ее движение прекращается.

Поскольку $\sigma = q - p$, производная от коэффициента пористости по массовой координате

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha \varepsilon \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t} \right). \quad (9)$$

Уравнение состояния воздуха при изотермической фильтрации будет иметь следующий вид

$$\rho_2 = \rho_a \frac{P + P_a}{P_a}, \quad (10)$$

где ρ_a – плотность воздуха при атмосферном давлении P_a .

Используя уравнения (9) и (10), а также вводя безразмерные переменные $\tau = \frac{t}{T_0}$, $\psi = \frac{s}{S_0}$ (где $2T_0$ – продолжительность прессования), уравнения (7) и (8) представим в виде

$$\alpha \varphi \varepsilon \frac{\rho_1}{\rho_3} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\rho_1}{\rho_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{T_0}{S_0^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{k_{\varphi 1} \xi \rho_1 \rho_3 \varepsilon^n}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial \psi} \right) + \alpha \varphi \varepsilon \frac{\rho_1}{\rho_3} \frac{\partial q}{\partial \tau}; \quad (11)$$

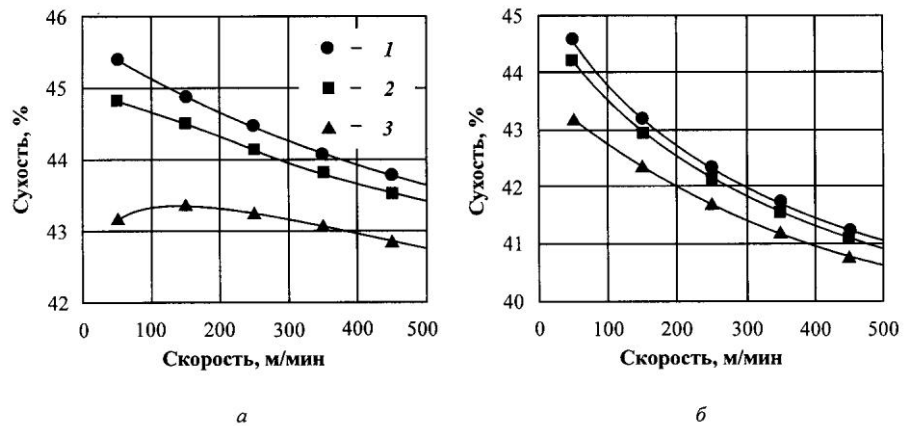


Рис. 3. Влияние скорости машины на сухость при прессовании бумаги между двух сукон (а) и с одним сукном (б) при различных значениях компрессионного коэффициента: 1 – $r = 0,95$; 2 – $0,80$; 3 – $0,60$

$$\frac{\alpha \varphi \xi}{\rho_3} \left(\alpha \rho_2 + \frac{\rho_a}{P_a} \right) \frac{\partial p}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{T_0}{S_0^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{k_{\varphi 2} \xi \rho_2 \rho_3 \varepsilon^n}{\mu_2} \frac{\partial p}{\partial \psi} \right) + \alpha \rho_2 \frac{\alpha \varphi \xi}{\rho_3} \cdot \frac{\partial q}{\partial \tau}, \quad (12)$$

где ξ – постоянная величина, характеризующая свойства конкретного бумажного полотна,

$$\xi = \frac{k_0}{\varepsilon_0^n + \varepsilon_0 + \varepsilon_{lim}^2}.$$

Систему уравнений (11) и (12) решали методом конечных разностей. На рис. 3 приведены результаты расчетов обезвоживания бумажного полотна в прессовом захвате при линейном давлении 40 кН/м и шириной 20 мм. Гидравлическим сопротивлением прессового сукна пренебрегали.

Из графиков, приведенных на рис. 3, следует, что сухость с увеличением скорости падает, за исключением случая прессования с двумя сукнами при $r = 0,60$, когда сухость возрастает при увеличении скорости до 150 м/мин. Это явление известно на практике и может быть объяснено обратным впитыванием воды из сукна в бумажное полотно.

Таким образом, предложенная математическая модель прессования бумажного полотна позволяет оценивать влияние различных параметров прессов на их обезвоживающую способность.

С.-Петербургский государственный
технологический университет
растительных полимеров

Поступила 23.05.05

A.B. Konovalov

Mathematical Model of Pressing Process of Paper Sheet in Papermaking Machine Presses

The mathematical model of pressing the paper sheet viewed as a three-component system consisting of water, air and pulp fiber is proposed. The system of two equations describing the dewatering of paper sheet under the influence of external variable load is received.

