

УДК 621.931

И.С. Лобанова, Н.В. Лобанов

Лобанова Ирина Станиславовна родилась в 1970 г., окончила в 1993 г. Севмашвтуз, старший преподаватель кафедры математики Севмашвтуза, аспирант кафедры прикладной механики и основ конструирования АГТУ. Имеет 2 печатные работы в области математического моделирования физических процессов при резании.



Лобанов Николай Владимирович родился в 1966 г., окончил в 1988 г. Севмашвтуз, кандидат технических наук, доцент кафедры подъемно-транспортного и технологического оборудования Севмашвтуза. Имеет более 10 печатных работ в области математического моделирования физических процессов при резании.



ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ОПИРАНИЯ ЛЕНТОЧНЫХ И РАМНЫХ ПИЛ НА ИХ НАЧАЛЬНУЮ ЖЕСТКОСТЬ

На основании точных решений уравнений стесненного кручения и изгиба пилы с учетом стесненности кручения оценено влияние условий закрепления на начальную жесткость пилы в зависимости от ее параметров.

Ключевые слова: условия опирания, пила, шарнирное опирание, защемление, дифференциальное уравнение, изгиб, кручение, стесненность кручения, прогиб, жесткость, коробление, перемещение.

Точность пиления древесины ленточнопильными станками и рамными пилами в значительной степени зависит от их начальной жесткости [1]. В работах [2–5] приведены формулы для расчета начальной жесткости пил энергетическим методом. При этом опирание концов пилы принято шарнирным. Однако реальные условия опирания концов пилы могут отличаться от шарнирного, например у рамных (свободная длина которых ограничена межпильными промежутками) или ленточных пил с односторонними отжимными направляющими.

Для того, чтобы качественно оценить влияние условий закрепления концов пилы на ее жесткость и, следовательно, оценить погрешность замены реальных граничных условий на шарнирное крепление, необходимо получить точное решение для полосовой пилы (как для стержня), нагруженной боковой нагрузкой, и сравнить ее жесткость при шарнирном опирании и защемлении концов пилы.

Рассмотрим пилу толщиной δ , имеющую ширину полотна b и свободную длину L и растянутую центрально приложенной силой N . К кромке пилы на расстоянии a от левой опоры приложена сосредоточенная боковая

сила P , которая вызывает изгиб и закручивание пилы как стержня. Приведем эту силу к оси пилы. Для этого необходимо в сечении, где приложена боковая сила, добавить момент, скручивающий пилу:

$$M_{\epsilon} = P \frac{b}{2}.$$

Расчетная схема пилы приведена на рис. 1.

Рассмотрим отдельно деформации изгиба и кручения пилы.

Изгиб пилы

При изгибе пилы силой P в закрепленных сечениях пилы, т.е. при $x = 0$ и $x = L$ могут возникать силы (R_0, M_0, R_L, M_L) и изгибающие моменты.

Дифференциальное уравнение плоского изгиба пилы можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(x) - k^2 y(x) = \frac{M_0 + R_0 x}{EI_z}; \quad x \leq a; \\ y''(x) - k^2 y(x) = \frac{M_0 + R_0 x}{EI_z} - \frac{P(x-a)}{EI_z}; \quad x > a; \end{array} \right. \quad (1)$$

$$k^2 = \frac{N}{EI_z},$$

где E – модуль Юнга материала пилы;

$I_z = b\delta^3/12$ – момент инерции сечения пилы относительно оси Z .

Общим решением уравнения (1) является

$$y(x) = \tilde{N}_1 \cdot \operatorname{ch}(kx) + C_2 \cdot \operatorname{sh}(kx) - \frac{R_0}{N} x - \frac{M_0}{N}. \quad (2)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 выразим через начальные условия $y(0) = y_0$; $y'(0) = y'_0$.

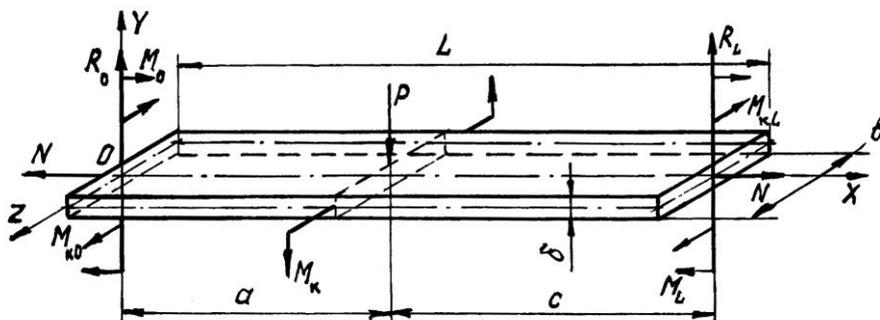


Рис. 1. Расчетная схема пилы

Тогда общее решение уравнения (1) запишем в следующем виде:
при $x \leq a$

$$y(x) = y_0 \cdot \operatorname{ch}(kx) + \frac{y'_0}{k} \cdot \operatorname{sh}(kx) + \frac{M_0}{N} (\operatorname{ch}(kx) - 1) + \frac{R_0}{N} \left(\frac{\operatorname{sh}(kx)}{k} - x \right); \quad (3)$$

при $x > a$

$$y(x) = y_0 \cdot \operatorname{ch}(kx) + \frac{y'_0}{k} \cdot \operatorname{sh}(kx) + \frac{M_0}{N} (\operatorname{ch}(kx) - 1) + \frac{R_0}{N} \left(\frac{\operatorname{sh}(kx)}{k} - x \right) - \frac{P}{N} \left(\frac{\operatorname{sh}(k(x-a))}{k} - (x-a) \right). \quad (4)$$

В случае шарнирного опирания концов пилы в плоскости XOY начальные условия имеют вид $y_0 = 0$; $M_0 = 0$.

Реакции опор можно найти из условий равновесия $R_0 = \frac{c}{L} P$, $R_L = \frac{a}{L} P$, начальный параметр y'_0 – из второго граничного условия $y(L) = 0$. Подставляя полученные выражения в (3) и (4), после элементарных преобразований получим уравнение прогибов пилы. Прогиб сечения, в котором приложена сила P , т.е. при $x = a$

$$f(a) = \frac{Pca}{NL} \left(\frac{\operatorname{sh}(kc) \cdot \operatorname{sh}(ka)}{k \cdot \operatorname{sh}(kL)} \frac{L}{ca} - 1 \right). \quad (5)$$

С практической точки зрения наиболее интересным будет случай приложения силы P на середине свободной длины пилы, т.е. при $a = L/2$.

Тогда

$$f_{\max} = \frac{PL}{4N} \left(\frac{2}{kL} \cdot \operatorname{th} \left(\frac{kL}{2} \right) - 1 \right). \quad (6)$$

В случае защемления концов пилы в плоскости ZOX граничные условия запишем в виде $y_0 = 0$; $y'_0 = 0$; $y(L) = 0$; $y'(L) = 0$. Откуда можно найти M_0 и R_0 .

Рассмотрим важный для практики частный случай, когда $a = L/2$ и $R_0 = P/2$. Сечение, где приложена сила, будет иметь максимальный прогиб. Из условия $y'(L/2) = 0$ можно определить M_0 . Опуская элементарные выкладки, получим при $x = a = L/2$ прогиб в сечении, где приложена нагрузка:

$$f_{\max} = -\frac{PL}{4N} \left(\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{kL}{2} \right) - 1}{\operatorname{sh} \left(\frac{kL}{2} \right)} \frac{4}{kL} - 1 \right). \quad (7)$$

Закручивание пилы

При закручивании пилы моментом M_k в закрепленных сечениях пилы, т.е. при $x = 0$ и $x = L$ возникают крутящие моменты $M_{\varepsilon 0}$, $M_{\varepsilon L}$ (рис. 1).

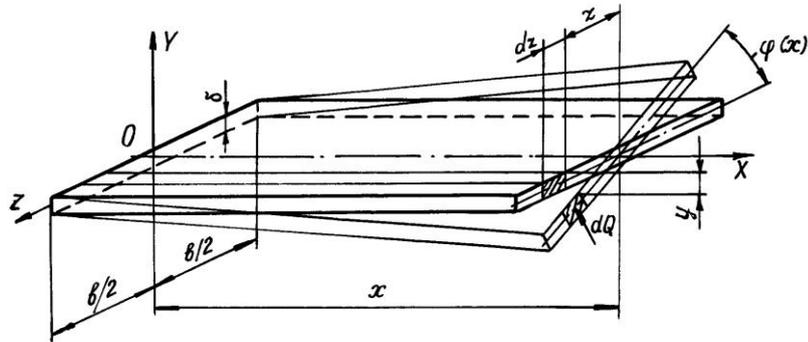


Рис. 2. Расчетная схема для определения жесткости пилы при короблении

Чтобы учесть влияние условий закрепления концов пилы в плоскости наименьшей жесткости XOY , нужно использовать дифференциальное уравнение стесненного (неравномерного) кручения пилы [6], которое с учетом растяжения запишем в виде

$$\begin{cases} Nr^2 \varphi'(x) - C_1 \varphi'''(x) = M_{\varepsilon 0}; & x \leq a; \\ Nr^2 \varphi'(x) - C_1 \varphi'''(x) = M_{\varepsilon 0} - M_{\varepsilon}; & x > a. \end{cases} \quad (8)$$

Жесткость при короблении C_1 найдем из условия изгиба элементарной продольной полоски пилы шириной dz , находящейся на расстоянии z от оси пилы, расчетная схема которой показана на рис. 2.

Прогиб сечения полоски выразим как $y = z\varphi(x)$. Тогда элементарный изгибающий момент относительно оси Z , возникающий в сечении полоски:

$$\delta M_z = Dz \frac{d^2 \varphi}{dx^2},$$

где $D = E \frac{dz \delta^3}{12}$ – жесткость полоски при изгибе ее в плоскости XOY .

При этом в сечении полоски возникнут касательные напряжения по оси Y и их равнодействующая элементарная перерезывающая сила:

$$dQ = \frac{d\delta M_z}{dx} = Dz \frac{d^3 \varphi}{dx^3}.$$

Крутящий момент, создаваемый дополнительными касательными напряжениями, определен из суммы моментов сил dQ относительно оси X :

$$M_{\varepsilon}^{\ddot{a}} = M_z = \int_{b/2}^{b/2} dQ \cdot z = \frac{E \delta^3 b^3}{144} \frac{d^3 \varphi}{dx^3}.$$

Множитель перед третьей производной угла закручивания и есть жесткость при короблении:

$$\tilde{N}_1 = \frac{E \delta^3 b^3}{144}.$$

Обозначим $C = Nr^2$ и $p^2 = \frac{C}{C_1}$. После преобразований получим окончательные дифференциальные уравнения стесненного кручения растянутой пилы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi''' - p^2 \varphi'(x) = -\frac{M_{\varepsilon 0}}{C_1}; \quad x \leq a; \\ \varphi''' - p^2 \varphi'(x) = \frac{M_{\varepsilon}}{C_1} - \frac{M_{\varepsilon 0}}{C_1}; \quad x > a. \end{array} \right. \quad (9)$$

Общее решение этих уравнений

$$\varphi(x) = \frac{M_{\varepsilon 0} x}{\tilde{N}} + A + A_1 \cdot \text{sh}(px) + A_2 \cdot \text{ch}(px). \quad (10)$$

Используя начальные параметры, определяющие условия на конце стержня при $x = 0$, найдем константы интегрирования A, A_1, A_2 . Подставляя A, A_1, A_2 в (13), получим при $x \leq a$ уравнения углов закручивания пилы:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{p} \cdot \text{sh}(px) + \frac{\varphi''_0}{p^2} (\text{ch}(px) - 1) + \frac{M_{\varepsilon 0}}{\tilde{N}} \left(x - \frac{\text{sh}(px)}{p} \right). \quad (11)$$

Начальные параметры $\varphi_0, \varphi'_0, \varphi''_0, M_{к0}$ определим из условий закрепления на концах пилы: $x = 0; x = L$.

Рассмотрим случай шарнирного закрепления концов пилы в плоскости XOY ($\varphi(0) = 0; \varphi(L) = 0$).

При шарнирном закреплении концов пилы коробление можно считать свободным, следовательно $\varphi''(0) = \varphi''(L) = 0$. Тогда, подставляя эти граничные условия в (11), после элементарных преобразований получим уравнение углов закручивания пилы. Угол закручивания в сечении $x = a$, где приложен момент M_{ε} (и сила P),

$$\varphi(a) = \frac{M_{\varepsilon}}{C} \left[\frac{\text{sh}(p(L-a)) \cdot \text{sh}(pa)}{\text{sh}(pL)} - \left(\frac{L-a}{L} \right) a \right].$$

С практической точки зрения наиболее интересным будет случай приложения P на середине свободной длины пилы, т.е. $a = L/2$. Тогда

$$\varphi_{\max} = \frac{M_{\varepsilon} L}{4C} \left[\text{th} \left(\frac{pL}{2} \right) \cdot \frac{2}{pL} - 1 \right]. \quad (12)$$

Рассмотрим случай защемления концов пилы в плоскости XOY ($\varphi(0) = 0; \varphi(L) = 0$). Коробление концевых сечений пилы в этом случае можно принять отсутствующим, следовательно, $\varphi'(0) = \varphi'(L) = 0$. Из этих условий можно выразить φ''_0 и $M_{к0}$. Подставив их в (11), получим уравнение углов закручивания защемленной по концам пилы. Однако это уравнение слишком громоздко для дальнейшего анализа.

Рассмотрим частный случай, когда $a = L/2$. Для определения φ''_0 и $M_{к0}$ воспользуемся свойством симметрии. Сечение, где приложена сила,

будет иметь максимальный угол закручивания и, следовательно, $\varphi'(L/2) = 0$. Опуская элементарные выкладки, определим угол закручивания сечения $x = a = L/2$, где приложена сила P :

$$\varphi_{\max} = \frac{M_{\varepsilon} L}{4\tilde{N}} \left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{pL}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{pL}{2}\right)} \frac{4}{pL} - 1 \right). \quad (13)$$

Зависимость начальной жесткости от условий закрепления

Начальная жесткость (в плоскости наименьшей жесткости)

$$j_n = P/\xi, \quad (14)$$

где P – приложенная боковая сила;

ξ – перемещение точки приложения силы на кромке пилы по оси Y (в боковом направлении).

Перемещение ξ складывается из перемещений, связанных с изгибом и закручиванием пилы:

$$\xi = y + \varphi \frac{b}{2}. \quad (15)$$

Приведенные выше дифференциальные уравнения и граничные условия позволяют определить перемещения точек пилы при действии силы P , приложенной в любой точке, и даже при распределенной нагрузке (после небольших преобразований). Для удобства анализа рассмотрим частный случай, когда сила приложена на середине свободной длины пилы, т.е. $a = L/2$.

Подставляя выражения (6) и (12) в (15), а затем в (14), и учитывая, что $M_{\varepsilon} = P \frac{b}{2}$ для шарнирно-опертой на концах пилы, имеем выражения для перемещения точки приложения боковой силы и начальной жесткости:

$$\xi_i^{\circ} = \frac{PL}{4N} \left(1 - \frac{2}{kL} \cdot \operatorname{th}\left(\frac{kL}{2}\right) \right) + \frac{Pb^2L}{16C} \left[1 - \operatorname{th}\left(\frac{pL}{2}\right) \cdot \frac{2}{pL} \right]; \quad (16)$$

$$j_i^{\circ} = \frac{1}{\frac{L}{4N} \left(1 - \frac{2}{kL} \cdot \operatorname{th}\left(\frac{kL}{2}\right) \right) + \frac{b^2L}{16C} \left[1 - \operatorname{th}\left(\frac{pL}{2}\right) \cdot \frac{2}{pL} \right]}. \quad (17)$$

Подставляя выражения (7) и (13) в (15), а затем в (14), для защемленной по концам пилы получим выражение перемещения точки приложения боковой силы и начальной жесткости:

$$\xi_i^{\varepsilon} = \frac{PL}{4N} \left(1 - \frac{4}{Lk} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{kL}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{kL}{2}\right)} \right) + \frac{Pb^2L}{16\tilde{N}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{pL}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{pL}{2}\right)} \frac{4}{pL} \right); \quad (18)$$

$$j_i^{\xi} = \frac{1}{\frac{L}{4N} \left(1 - \frac{4}{Lk} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{kL}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{kL}{2}\right)} \right) + \frac{b^2 L}{16\tilde{N}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{pL}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{pL}{2}\right)} \frac{4}{pL} \right)}. \quad (19)$$

В выражениях (16) – (19) множители $\frac{PL}{4N}$ и $\frac{Pb^2L}{16C}$ представляют перемещения точки приложения силы, обусловленные соответственно только жесткостью пилы на изгиб за счет натяжения (без учета изгибной жесткости) и жесткостью растянутой пилы на кручение (без учета стеснения при кручении). Вторые слагаемые в скобках выражений (16) – (19) представляют относительное уменьшение перемещений (увеличение жесткости), связанное с изгибной жесткостью, и жесткость стесненного кручения пилы. Следовательно, именно слагаемые будут определять относительное влияние условий закрепления концов пилы на ее начальную жесткость.

Множители вторых слагаемых в скобках выражений (16) – (19):

$$\operatorname{th}\left(\frac{kL}{2}\right) \approx 1 \quad \text{при} \quad \frac{kL}{2} \geq 2; \quad \operatorname{th}\left(\frac{pL}{2}\right) \approx 1 \quad \text{при} \quad \frac{pL}{2} \geq 2;$$

$$\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{kL}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{kL}{2}\right)} \approx 1 \quad \text{при} \quad \frac{kL}{2} \geq 3,5; \quad \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{pL}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{pL}{2}\right)} \approx 1 \quad \text{при} \quad \frac{pL}{2} \geq 3,5.$$

В реальных условиях для полосовых пил обычно выполняются соотношения $\frac{kL}{2} \geq 3,5$; $\frac{pL}{2} \geq 3,5$. Например, для ленточной пилы с параметрами $N = 2$ кН, $L = 200$ мм, $b = 100$ мм, $\delta = 1,0$ мм имеем:

$$\frac{kL}{2} = 3,500; \quad \frac{pL}{2} = 5,408.$$

Для рамной пилы при $N = 10$ кН, $L = 500$ мм, $b = 160$ мм, $\delta = 2,5$ мм имеем:

$$\frac{kL}{2} = 3,735; \quad \frac{pL}{2} = 7,623.$$

В приведенных примерах свободная длина и сила натяжения пилы минимальны, с увеличением L и N они будут увеличиваться.

С учетом вышеизложенного, выражения (16) – (19) могут быть упрощены:

для шарнирно-опертой по концам пилы

$$\xi_i^{\emptyset} \approx \frac{PL}{4N} \left(1 - \frac{2}{kL} \right) + \frac{Pb^2L}{16C} \left[1 - \frac{2}{pL} \right]; \quad (20)$$

$$j_i^{\theta} \approx \frac{1}{\frac{L}{4N} \left(1 - \frac{2}{kL}\right) + \frac{b^2 L}{16C} \left[1 - \frac{2}{pL}\right]} ; \quad (21)$$

для защемленной по концам пилы

$$\xi_i^3 \approx \frac{PL}{4N} \left(1 - \frac{4}{kL}\right) + \frac{Pb^2 L}{16C} \left[1 - \frac{4}{pL}\right] ; \quad (22)$$

$$j_i^{\xi} \approx \frac{1}{\frac{L}{4N} \left(1 - \frac{4}{kL}\right) + \frac{b^2 L}{16C} \left[1 - \frac{4}{pL}\right]} . \quad (23)$$

Анализ выражений (20) и (22) показывает, что замена защемления концов полосовой пилы на шарнирное опирание приводит к относительному увеличению смещения точки приложения силы, которое приблизительно определяется безразмерными комплексами $2/kL$ и $2/pL$.

Таким образом, имеются достаточно простые критерии оценки погрешности в определении начальной жесткости, связанной с заменой защемления концов полосовой пилы на шарнирное опирание.

Необходимо отметить, что стесненность кручения полотна пилы обычно не учитывается, следовательно, погрешность, связанная с заменой защемления концов полосовой пилы на шарнирное опирание, возрастает и определяется величинами $2/kL$ и $4/pL$.

Кроме того, когда стесненность кручения не учитывается, возникает погрешность в определении перемещений пилы даже при шарнирном закреплении, равная $\frac{Pb^2 L}{16C} \frac{2}{pL}$.

Из анализа выражений $\frac{kL}{2}$ и $\frac{pL}{2}$ вытекает следующее:

с увеличением ширины b и толщины δ пилы влияние условий закрепления концов пилы возрастает примерно в $b^{0.5}$ и $\delta^{1.5}$ раз;

с увеличением свободной длины пилы L и силы натяжения N влияние условий закрепления концов пилы убывает примерно в L и $N^{0.5}$ раз.

Для количественной оценки влияния условий закрепления концов полосовых пил по формулам (16) – (19) были выполнены сравнительные расчеты начальной жесткости полосовых пил при следующих способах закрепления их концов: шарнирное опирание без учета стеснения при кручении; шарнирное опирание с учетом стеснения при кручении; защемление (с учетом стеснения при кручении).

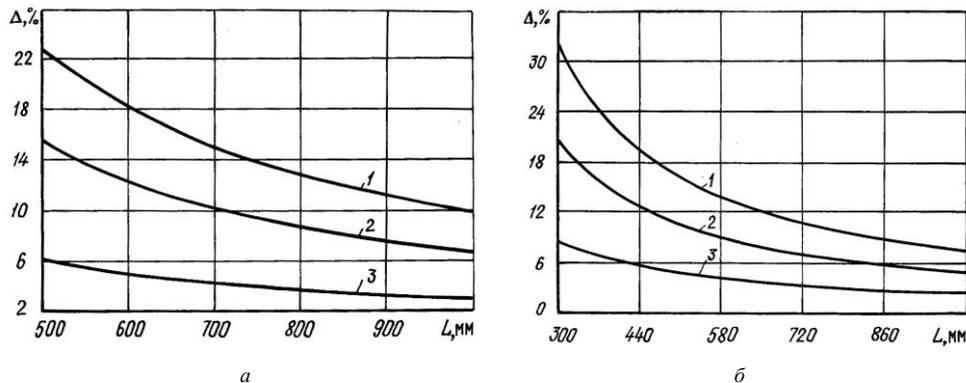


Рис. 3. Зависимость относительного изменения (погрешность) Δ начальной жесткости рамной пилы ($E = 215\,000$ МПа; $G = 81\,000$ МПа) от свободной длины L : $a - N = 30$ кН, $b = 140$ мм, $\delta = 2,5$ мм, $\delta - 3$ кН, 120 мм, 1,0 мм; 1 – шарнирное опирание без учета стеснения кручения; 2 – с учетом стеснения

Графики, приведенные на рис. 3, иллюстрируют связь между начальной жесткостью рамной пилы J_n и свободной длиной L при замене защемления концов пилы на шарнирное опирание. (Кривая 3 иллюстрирует зависимость погрешности от неучета стеснения, когда моделируются реальные условия закрепления концов пилы.) Из приведенных графиков следует, что различие в значениях начальной жесткости защемленной и шарнирно опертой пилы при прочих равных условиях может быть существенным, и достигать 20 (рис. 3, *a*) и 30 % (рис. 3, *б*).

Выводы

1. При относительно малых свободных длинах и силах натяжения или при относительно большой толщине и ширине полосовых пил различие в значениях начальной жесткости при защемлении концов пилы и их шарнирном опирании может оказаться существенным (до 20 % и более).

2. Получены расчетные критерии, позволяющие оценить влияние условий закрепления на начальную жесткость пилы в зависимости от ее параметров, следовательно решить вопрос о необходимости учета реальных условий закрепления при определении рациональных технологических параметров пиления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюквин А.В. Динамическая модель колебаний дереворежущих ленточных пил // Автореф. ... канд. техн. наук, 1994. – 22 с.
2. Веселков В.И. Теория и конструкции ленточнопильных станков // Учебное пособие. – Архангельск.: АЛТИ, 1992. – 84 с.
3. Прокофьев Г.Ф., Иванкин И.И., Дундин Н.И. Исследование начальной жесткости полосовых пил. Точность пиления древесины рамными и ленточными пилами // Лесн. журн. – 2001. – № 3. – С. 88–95. – (Изв. высш. учеб. заведений).
4. Прокофьев Г.Ф. Точность пиления древесины рамными и ленточными пилами // Лесн. журн. – 1996. – № 6. – С. 74–80. – (Изв. высш. учеб. заведений).

5. Прокофьев Г.Ф., Иванкин И.И. Теоретические исследования начальной жесткости ленточных и рамных пил // Охрана окружающей среды и рациональное использование природных ресурсов: Сб. науч. тр. / АГТУ. – 1997. – Вып. 3. – С. 20–24.

6. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 2. – М.: Наука, 1965. – 480 с.

Севмашвтуз

Поступила 26.03.02

I.S. Lobanova, N.V. Lobanov

Effect of Band and Frame Saw Support Conditions on their Initial Rigidity

The effect of fixing conditions on initial saw rigidity depending on saw's parameters has been estimated based on accurate solutions of constrained saw torsion and bending equations.
