

УДК 674.093

А.Е. Алексеев, М.В. Захаров

Алексеев Александр Евгеньевич родился в 1958 г., окончил в 1980 г. Архангельский лесотехнический институт, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой мехатроники Севмашвуза. Имеет свыше 100 научных трудов в области лесопиления.



Захаров Максим Владимирович родился в 1976 г., окончил в 1999 г. Архангельский государственный технический университет, кандидат технических наук, ассистент кафедры автоматизации технологических процессов и производств Архангельского государственного технического университета. Имеет более 10 научных работ в области автоматизации технологических процессов лесопиления.



ОБОСНОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ИЗМЕРИТЕЛЯ КОЛЬЦЕВОЙ ФОРМЫ И ПРОЦЕССА ИЗМЕРЕНИЯ РАЗМЕРОВ СОРТИМЕНТОВ

Предложен способ измерения геометрических размеров круглых лесоматериалов; разработан математический аппарат для обработки получаемой с измерителя информации; изложены технологические требования к измерителю кольцевой формы.

Ключевые слова: измеритель, сортимент, модель, образующая, сечение, форма.

Повышение информативности измерительных операций, совершенствование методов обработки информации, а также технических средств измерения, контроля и учета требуемых параметров являются основными направлениями разработки и создания современных технологий и оборудования. Известные измерительные устройства позволяют анализировать плоскую форму поперечного и продольного сечений сортимента в одной или нескольких плоскостях. Это определяется конструкцией измерителей, имеющих одну или несколько пар параллельно установленных плоских измерительных линеек. При этом повышение многогранности формы рамы измерителя (от квадратной до многоугольной) ограничено точностью определения формы измеряемого сечения сортимента. Иначе при проектировании одного измерителя с многократным сокращением длины отдельной линейки требуемый охват зоны измерений сортимента приведет к увеличению размеров рамы. В другом случае для достижения требуемого результата измерений потребуется несколько последовательно установленных рам.

При выбранной стратегии оптимального поиска основывались на принципе минимакса. В соответствии с положениями теории исследования операций применение такого подхода гарантирует результат по совокупности признаков, по крайней мере, не худший из возможных.

Выбор функции, описывающей гладкую замкнутую линию в полярной системе координат. Определение такой функции необходимо для построения математической модели рамы измерителя. При известных полярных координатах $N + 1$ произвольных точек (узлов) $R_i = F(\phi_i)$, $I = 0, \dots, N$, через которые необходимо провести замкнутую гладкую линию. В первом приближении очевидно принять полином $R_N = \sum a_i \phi_i^i$. Однако при этом нарушается условие гладкости. Поскольку полином не является периодической функцией, в точке $\phi = 0$ образуется дефект (перегиб).

Другой вариант – соединить узлы кубическими сплайнами. При этом придется иметь дело с $N + 1$ отдельными функциями. Сплайновая интерполяция эффективна при большом количестве узлов, когда нет необходимости в нахождении функции для всего интервала. В целом число узлов следует принимать минимально допустимым. В этом случае целесообразно определить единственную функцию для всего интервала $[0; 2\pi]$.

За основу примем функцию $f(\phi) = Ae^{-\phi^2}$, которая проходит через 1-й узел. Экстремум данной функции равен A при $\phi = 0$. Если какой-либо узел имеет полярный угол $\phi_i = 0$, то коэффициент A равен полярному радиусу узла R_i . Если $\phi_i <> 0$, то функцию $f(\phi)$ необходимо сдвинуть на соответствующий угол

$$f(\phi, \phi_i) = R_i e^{-(\phi - \phi_i)^2}. \quad (1)$$

Таким образом, экстремум функции будет попадать на i -й узел интерполяции. Однако функция (1) – непериодическая, следовательно, она не является непрерывной. Введем корректирующую функцию $q(\phi, \phi_i)$, чтобы функция $f(\phi, \phi_i)$ стала периодической с периодом 2π :

$$q(\phi, \phi_i) = \begin{cases} \begin{cases} 0 & \phi \leq (\phi_i + \pi) \\ -2\pi & \phi > (\phi_i + \pi) \end{cases} & (\phi_i \leq \pi); \\ \begin{cases} 2\pi & \phi \leq (\phi_i - \pi) \\ 0 & \phi > (\phi_i - \pi) \end{cases} & (\phi_i > \pi). \end{cases} \quad (2)$$

Тогда скорректированная функция (1) примет вид

$$f(\phi, \phi_i) = R_i e^{-(\phi - \phi_i + q(\phi, \phi_i))^2}. \quad (3)$$

На рис. 1 изображены графики данной функции, точками обозначены узлы интерполяции. Так как $f(0, \phi_i) = f(2\pi, \phi_i) = R_i e^{-(\phi_i)^2}$ и производные $f^{(n)}(0, \phi_i) = f^{(n)}(2\pi, \phi_i)$, то функция $f(\phi, \phi_i)$ в точках $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi$ является непрерывной и гладкой.

Проанализируем поведение функции в другой критической точке: $\phi = \phi_i + \pi$. Для этого сравним значения самой функции и ее первой производной слева и справа от данной точки:

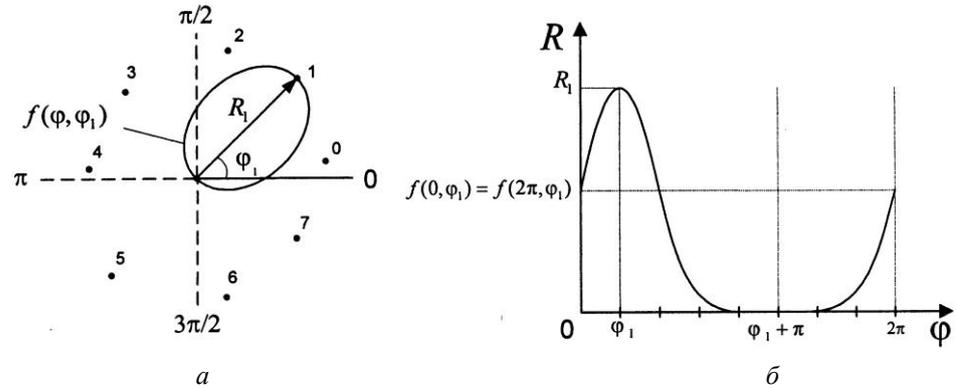


Рис. 1. Графики функции $f(\phi, \phi_1)$ в полярных (а) и прямоугольных (б) координатах

$$\begin{aligned}
 f(\phi_i + \pi - 0, \phi_i) &= R_i e^{-\pi^2}; \\
 f(\phi_i + \pi + 0, \phi_i) &= R_i e^{-(-\pi)^2} = R_i e^{-\pi^2}; \\
 f'(\phi_i + \pi - 0, \phi_i) &= (\phi_i - \phi) 2R_i e^{-(\phi - \phi_i)^2} = -2\pi R_i e^{-\pi^2}; \\
 f'(\phi_i + \pi + 0, \phi_i) &= (\phi_i - \phi + 2\pi) 2R_i e^{-(\phi - \phi_i - 2\pi)^2} = 2\pi R_i e^{-\pi^2}.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Так как $f(\phi_i + \pi - 0, \phi_i) = f(\phi_i + \pi + 0, \phi_i)$, то функция является непрерывной в этой точке. Однако производные не совпадают, следовательно, функция в этом месте имеет дефект. Величина перегиба соответствует разности производных слева и справа от критической точки. Поскольку $f(\phi_i + \pi, \phi_i) \approx 0$ и $f'(\phi_i + \pi - 0, \phi_i) = -f'(\phi_i + \pi + 0, \phi_i) \approx 0$, то этот дефект очень незначителен, и, с достаточной для практических расчетов точностью, им можно пренебречь.

Функцию кривой, проходящей через все узлы (рис. 2), определим как сумму функций $f(\phi, \phi_i)$ каждого узла:

$$R(\phi) = \sum_{i=0}^N A_i e^{-(\phi - \phi_i + q(\phi, \phi_i))^2}. \tag{5}$$

Коэффициенты A_i находим из решения системы уравнений

$$R_p = \sum_{i=0}^N A_i e^{-(\phi_p - \phi_i + q(\phi_p, \phi_i))^2}, \quad p = 0, 1, \dots, N. \tag{6}$$

Выбор математической модели рамы измерителя. Рама измерителя имеет близкую к окружности форму. Так как форма рамы влияет на показания измерителя при обмере сечения сортимента, необходимо задать математическую модель, которая бу-

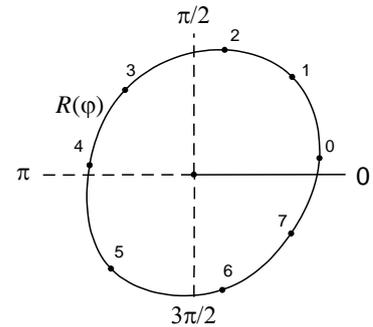


Рис. 2. Кривая, проходящая через все узлы

дет корректировать погрешности, порождаемые неправильной формой рамы.

Форму рамы определяют по расстояниям $R_0 \dots 7$ между противоположными точками рамы. Угловые координаты каждой точки равны $i(\pi/4)$, $i = 0, \dots, 7$. Тогда математическая модель рамы

$$R(\phi) = \sum_{i=0}^7 A_i e^{-\left(\phi - i\frac{\pi}{4} + q(\phi, i)\right)^2}, \quad (7)$$

$$\text{где } q(\phi, i) = \begin{cases} \begin{cases} 0 & \phi \leq (i+4)\pi/4 \\ -2\pi & \phi > (i+4)\pi/4 \end{cases} & (i \leq 4); \\ \begin{cases} 2\pi & \phi \leq (i-4)\pi/4 \\ 0 & \phi > (i-4)\pi/4 \end{cases} & (i > 4). \end{cases}$$

Коэффициенты A_i находят из решения системы

$$R_p = \sum_{i=0}^7 A_i e^{-\left(p\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4} + q(p\frac{\pi}{4}, i)\right)^2}; \quad p = 0, 1, \dots, 7. \quad (8)$$

Если рама – идеальная окружность, то $A_0 = A_1 = \dots = A_7$.

Определение математической модели сечения сортимента. На рис. 3 приведена схема измерения сечения сортимента. Поверхность сечения может быть представлена замкнутой кривой, вписанной в многоугольник ABCDEFGH. Для определения математической модели необходимо найти полярные координаты точек $Z_0 \dots k$ (узлов). Однако результаты измерений нам дают только номера излучателей на позициях свет/тень относительно каждого приемника (на рис. 3 положение этих излучателей отмечено прямыми линиями).

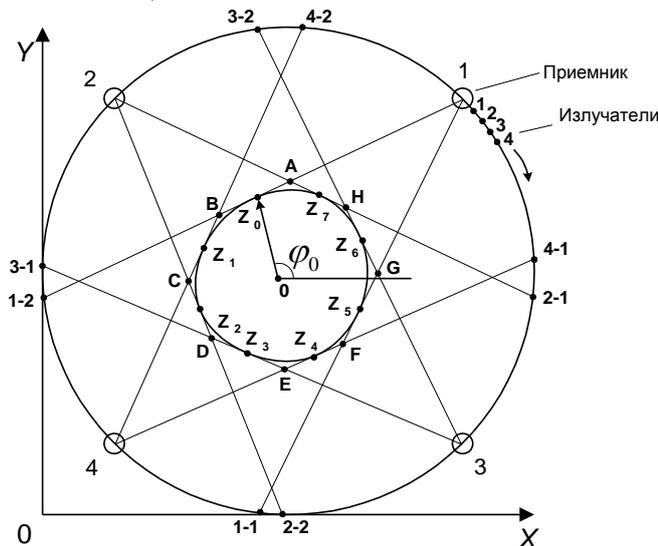


Рис. 3. Процесс измерения сечения сортимента

Координаты узлов находят по следующему алгоритму.

а) Определить координаты центра рамы в прямоугольных координатах

$$X_c = R(\pi); Y_c = R(3\pi/2). \quad (9)$$

б) Определить прямоугольные координаты приемников как координаты любой точки на поверхности рамы по известному полярному углу ϕ этой точки:

$$X_p = X_c + R(\phi) \cos \phi; \quad Y_p = Y_c + R(\phi) \sin \phi; \quad (10)$$

в) Определить координаты излучателей, которые находятся на равном угловом расстоянии друг от друга $\phi_i = \frac{9}{4}\pi + \frac{\pi}{N} - \frac{2\pi i}{N}$:

$$X_i = X_c + R(\phi_i) \cos \phi_i; \quad Y_i = Y_c + R(\phi_i) \sin \phi_i. \quad (11)$$

Здесь N – общее число излучателей, $i = 0, \dots, N - 1$ (вычисления (9)–(11) необходимо выполнить только один раз за все время проведения измерений, поскольку форма рамы, число и положение приемников и излучателей – величины постоянные);

г) Определить номера (соответственно и координаты) излучателей, лучи которых образуют многоугольник (рис. 4):

$$X_i = \frac{X_i + X_{i+1}}{2}; \quad Y_i = \frac{Y_i + Y_{i+1}}{2} \quad (12)$$

или

$$X_i = \frac{X_i + X_{i-1}}{2}; \quad Y_i = \frac{Y_i + Y_{i-1}}{2}. \quad (13)$$

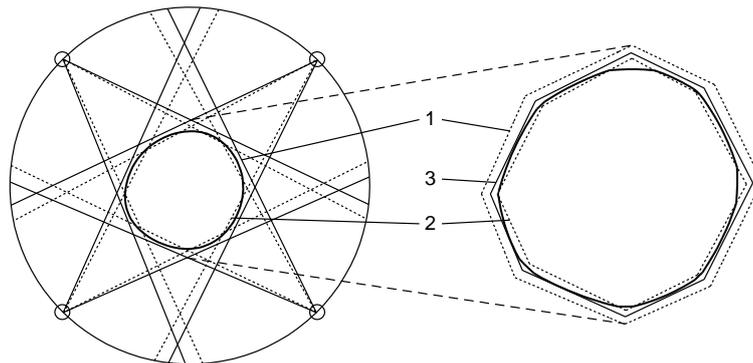


Рис. 4. Определение многоугольника, описывающего сечение сортимента: 1 – лучи, охватывающие сечение; 2 – лучи, сдвинутые к центру рамы на один излучатель; 3 – усредненный многоугольник

д) Определить уравнения лучей, соединяющих i -й излучатель с j -м приемником:

$$Y_{(i,j)} = K_{(i,j)} X + B_{(i,j)}, \quad (14)$$

где $K_{(i,j)} = \frac{Y_{pj} - Y_i}{X_{pj} - X_i}$; $B_{(i,j)} = Y_i - K X_i$.

е) Определить координаты точки пересечения двух лучей $Y_{(a,b)}$ и $Y_{(c,d)}$ (т.е. точки $A, B, C \dots H$):

$$X_s = \frac{B_{(c,d)} - B_{(a,b)}}{K_{(a,b)} - K_{(c,d)}}; \quad Y_s = Y_{(a,b)}(X_s). \quad (15)$$

ж) Определить координаты узлов $Z_0 \dots Z_7$ как координаты середины отрезка между соседними точками пересечения лучей:

$$X_z = \frac{X_{s1} + X_{s2}}{2}; \quad Y_z = \frac{Y_{s1} + Y_{s2}}{2}. \quad (16)$$

Следующая задача – найти такую замкнутую кривую, чтобы она проходила через точки $Z_0 \dots Z_k$ и одновременно вписывалась в многоугольник ABCDEFHG. Функция (7) для этой цели непригодна, так как она не будет вписываться в данный многоугольник, по этой же причине непригодны все классические интерполяционные модели, в том числе и кубические сплайны.

Рассмотрим один произвольный угол многоугольника (рис. 5), образованный линиями $y_i(x)$ и $y_{i+1}(x)$. Нам известны координаты точек Z_i и Z_{i+1} на поверхности этого многоугольника. Требуется определить функцию $Q(\phi)$, проходящую через эти точки и вписанную в многоугольник, т.е. не выходящую за пределы линий $y_i(x)$ и $y_{i+1}(x)$.

Очевидно, что линии $y_i(x)$ и $y_{i+1}(x)$ должны являться касательными к функции $Q(\phi)$. Следовательно, условие «вписываемости» функции $Q(\phi)$ в угол многоугольника – это равенство производных линий, образующих угол, с производной функции $Q(\phi)$ в точках Z_i и Z_{i+1} . Однако в прямоугольных координатах решать поставленную задачу невозможно, так как на некоторых промежутках функция $Q(x)$ должна принимать одновременно два значения при одном значении x . Решение возможно в полярных координатах.

Выберем точку отсчета полярных координат. Если принять ее совпадающей с точкой отсчета прямоугольных координат, то уравнения прямых $y_i(x)$ и $y_{i+1}(x)$ необходимо перевести из прямоугольных координат в полярные, что является сложной задачей. Поэтому выберем положение точки отсчета так, чтобы максимально упростить перевод исходных данных задачи из одной системы координат в другую. На самом деле нет необходимости

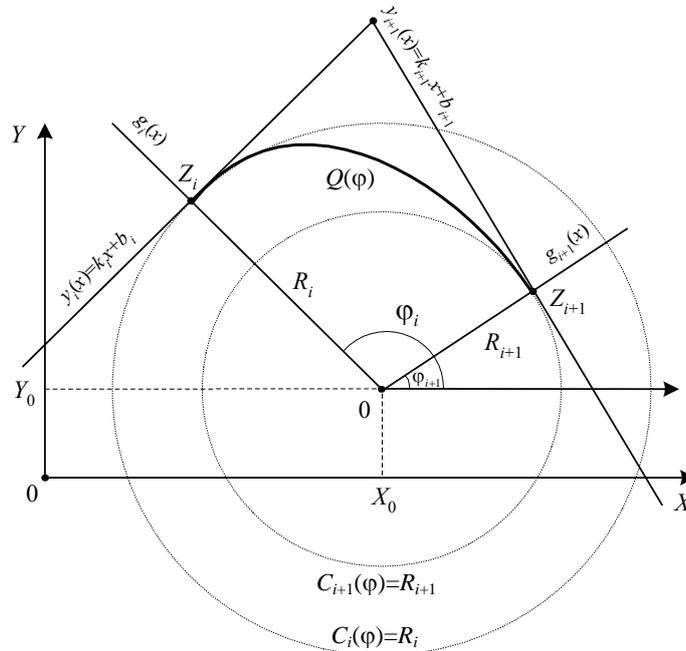


Рис. 5. Определение кривой $Q(\phi)$, вписанной в угол многоугольника и проходящей через узлы Z_i и Z_{i+1}

полностью переводить уравнения прямых $y_i(x)$ и $y_{i+1}(x)$, достаточно найти такие функции $C_i(\phi)$ и $C_{i+1}(\phi)$, которые бы совпадали по направлению с прямыми $y_i(x)$ и $y_{i+1}(x)$ в точках Z_i и Z_{i+1} , т.е. эти прямые являлись бы касательными к $C_i(\phi)$ и $C_{i+1}(\phi)$. Наиболее простая функция в полярных координатах – окружность $C(\phi) = C$, кроме того, производная окружности – 0. Строим окружности таким образом, чтобы они касались $y_i(x)$ и $y_{i+1}(x)$ в точках Z_i и Z_{i+1} и имели бы общий центр (рис. 6), который и будет являться точкой отсчета полярных координат. Для этого построим прямые $g_i(x)$ и $g_{i+1}(x)$, перпендикулярные прямым $y_i(x)$ и $y_{i+1}(x)$ в точках Z_i и Z_{i+1} :

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -\frac{1}{k_1}; & N_1 &= X_{z(i)}(k_1 - M_1) + b_1; \\
 M_2 &= -\frac{1}{k_2}; & N_2 &= X_{z(i+1)}(k_2 - M_2) + b_2; \\
 g_i(x) &= M_1x + N_1; \\
 g_{i+1}(x) &= M_2x + N_2.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Определим координаты точки пересечения этих перпендикуляров:

$$X_0 = \frac{N_2 - N_1}{M_1 - M_2}; \quad Y_0 = M_1X_0 + N_1. \tag{18}$$

После нахождения точки отсчета найдем функцию $Q(\phi)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$Q(\phi_i) = R_i; Q(\phi_{i+1}) = R_{i+1}; \quad (19)$$

$$Q'(\phi_i) = C_i'(\phi_i) = 0; Q'(\phi_{i+1}) = C_{i+1}'(\phi_{i+1}) = 0.$$

Так как условий – четыре, то в качестве функции $Q(\phi)$ возьмем полином 3-го порядка:

$$Q(\phi) = a(\phi - \phi_i)^3 + b(\phi - \phi_i)^2 + c(\phi - \phi_i) + d. \quad (20)$$

Его производная

$$Q'(\phi) = 3a(\phi - \phi_i)^2 + 2b(\phi - \phi_i) + c. \quad (21)$$

Записав условия (19) в соответствии с функцией (20), получим

$$d = R_i; c = 0;$$

$$a(\phi_{i+1} - \phi_i)^3 + b(\phi_{i+1} - \phi_i)^2 + c(\phi_{i+1} - \phi_i) + d = R_{i+1}; \quad (22)$$

$$3a(\phi_{i+1} - \phi_i)^2 + 2b(\phi_{i+1} - \phi_i) + c = 0.$$

Решив эту систему относительно a, b, c, d , определим коэффициенты полинома

$$d = R_i; c = 0;$$

$$b = \frac{3(R_{i+1} - R_i)}{(\phi_{i+1} - \phi_i)^2}; \quad a = -\frac{2(R_{i+1} - R_i)}{(\phi_{i+1} - \phi_i)^3}, \quad (23)$$

где $R_i = \sqrt{(X_0 - X_{z(i)})^2 + (Y_0 - Y_{z(i)})^2}$; $R_{i+1} = \sqrt{(X_0 - X_{z(i+1)})^2 + (Y_0 - Y_{z(i+1)})^2}$.

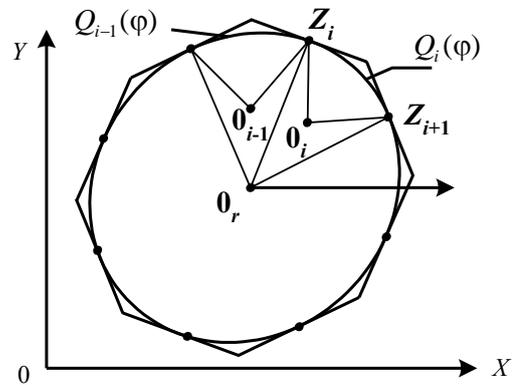
Таким образом, для каждого из участков определим свою функцию $Q_i(\phi)$ (рис. 6). Эти функции будут плавно переходить друг в друга в узловых точках, так как их первые производные с этих точек совпадают.

В результате этого математическая модель сечения сортимента будет задана следующими данными: координатами центра рамы X_c, Y_c ; полярным углом узловых точек ϕ_i ; координатами точек отсчета 0_i для каждого i -го промежутка; коэффициентами a_i, b_i, c_i, d_i каждого i -го полинома $Q_i(\phi)$.

Решение задачи позволяет определить координаты любой точки на поверхности сечения сортимента.

Определение площади сечения сортимента. Докажем, что площадь фигуры, ограниченной функцией $f(x)$ на определенном промежутке

Рис. 6. Иллюстрация образования гладкой замкнутой фигуры найденными функциями $Q(\varphi)$



$[a, b]$, численно равна среднему арифметическому площадей прямоугольников, ширина которых равна ширине промежутка, а высота – значению функции $f(x)$ в соответствующих точках промежутка при условии, что количество этих прямоугольников стремится к бесконечности (рис. 7).

Площадь такой фигуры равна значению определенного интеграла, которое, можно вычислить из классической формулы прямоугольников:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right). \quad (24)$$

Среднее арифметическое площадей больших прямоугольников

$$S = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (b-a) f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)}{n}. \quad (25)$$

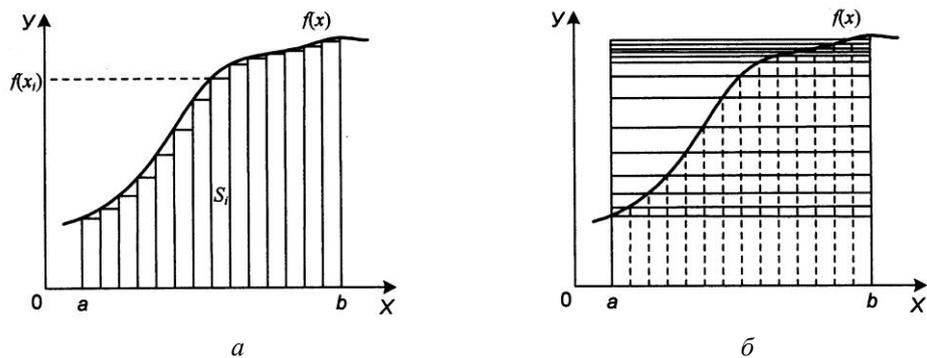
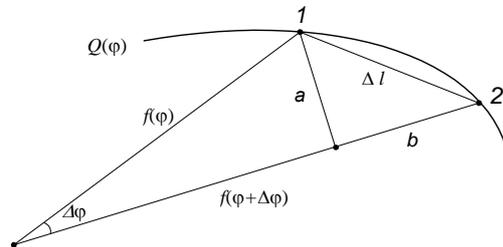


Рис. 7. Вычисление площади фигуры по сумме площадей элементарных прямоугольников (а) и среднему арифметическому площадей больших прямоугольников (б)

Рис. 8. Определение длины элементарной дуги



Перейдя к пределу и преобразовав, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (b-a) f(a + i \frac{b-a}{n})}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x) dx = S. \quad (26)$$

В полярных координатах формула (24) имеет следующий геометрический смысл: площадь фигуры, образованной замкнутой кривой функции $Q(\phi)$, равна среднему арифметическому площадей окружностей, центр которых расположен в начале координат, а радиус равен значениям $Q(\phi)$ в равномерно расположенных полярных углах на промежутке $[0, 2\pi]$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \pi Q^2(i \frac{2\pi}{n})}{n}. \quad (27)$$

Определение длины поверхности сечения. Возьмем на поверхности сечения две близко расположенные точки 1 и 2 (рис. 8).

В качестве длины дуги Δl между этими точками примем величину, эквивалентную (при $\Delta\phi \rightarrow 0$) длине хорды, стягивающей точки 1 и 2. Длина хорды

$$\Delta l = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(Q(\phi) \sin \Delta\phi)^2 + (Q(\phi + \Delta\phi) - Q(\phi) \cos \Delta\phi)^2}. \quad (28)$$

Учитывая, что при $\Delta\phi \rightarrow 0$, $\sin \Delta\phi \rightarrow \Delta\phi$, $\cos \Delta\phi \rightarrow 1$, определим выражение для дифференциала длины кривой:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta l}{\Delta\phi} &= \sqrt{\left(\frac{Q(\phi) \sin \Delta\phi}{\Delta\phi}\right)^2 + \left(\frac{Q(\phi + \Delta\phi) - Q(\phi) \cos \Delta\phi}{\Delta\phi}\right)^2} = \\ &= \sqrt{Q^2(\phi) + \left(\frac{Q(\phi + \Delta\phi) - Q(\phi)}{\Delta\phi}\right)^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Перейдем к пределу при $\Delta\phi \rightarrow 0$:

$$dl = \sqrt{Q^2(\phi) + (Q'(\phi))^2} d\phi. \quad (30)$$

Всю длину кривой определим посредством интегрирования:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{Q^2(\varphi) + (Q'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (31)$$

Математическая модель сечения сортимента состоит из совокупности кривых $Q_i(\varphi)$, каждая из которых определена на своем промежутке от φ_i до φ_{i+1} . Таким образом, длина поверхности сечения

$$L = \sum_{i=0}^k \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \sqrt{Q_i^2(\varphi) + (Q_i'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (32)$$

Предложенное техническое решение, способ измерений и метод обработки информации могут служить основанием для создания в лесопильной промышленности системы распознавания образов, поскольку позволяют реализовать принципы цифровой записи реальной формы сортиментов.

Архангельский государственный
технический университет

Поступила 10.02.04

A.E. Alekseev, M.V. Zakharov

Substantiation of Technological Parameters for Circular Form Meter and Assortment Measuring Process

Means of measuring geometrical dimensions of round wood and mathematical apparatus are proposed for processing obtained information; technological requirements to circular form measuring are set forth.

