УДК 532.5:624.164.7

А.Н. Вихарев, П.Н. Гагарин

Вихарев Александр Николаевич родился в 1961 г., окончил в 1987 г. Архангельский лесотехнический институт, кандидат технических наук, доцент кафедры водного транспорта леса и гидравлики Архангельского государственного технического университета. Имеет около 60 печатных трудов в области водного транспорта леса.

Гагарин Павел Николаевич родился в 1959 г., окончил в 1983 г. Архангельский лесотехнический институт, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики Архангельского государственного технического университета. Имеет около 30 печатных трудов в области водного транспорта леса и гидромеханики.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТА ВБЛИЗИ РАБОТАЮЩЕГО АНКЕРА

Для расчета напряженного состояния сыпучих сред (грунтов) предложена альтернативная модель приведения физической сущности полей течений к силовым полям.

Ключевые слова: потенциальные поля, аналогия, сжимающее напряжение, плотность количества движения, анкерная опора.

Во многих инженерных и научных задачах применяют моделирование физических процессов с помощью теории потенциального поля (или метода конформного отображения). Его используют в основном в гидро- и аэромеханике для предсказания поведения течений в различных условиях: при расчете скоростей, давлений, сил сопротивления тел при их обтекании, определении подъемных сил крыльев, присоединенных масс и т. д. Здесь неизбежны допущения о жидкости как потенциальной среде, хотя таковой она не является, в первую очередь из-за наличия вязкости. В ряде задач наблюдают отклонения полученных теоретических результатов от истинных. В этом случае на базовую потенциальную модель налагают эмпирические данные, а также условия, учитывающие реальные свойства среды.

С учетом возможных допущений и последующей корректировки этот метод, на наш взгляд, можно применять и к расчету силовых полей в сплошных средах. Так, авторами были вычислены формы грунтовых призм скольжения при работе анкерных опор (на лесосплаве, в строительстве и т. д.). Расчетные кривые в плоской задаче удовлетворительно совпали [1] с опытными данными при различных глубинах заложения анкеров, углах приложения вектора силы и углах внутреннего трения грунта. Как известно, в рамках классической механики грунтов расчет линий скольжения сопровождается значительными трудностями.

Для определения форм линий скольжения далее методом численного интегрирования касательных напряжений на поверхности призмы находили держащую силу с учетом реальных характеристик грунтов.

При расчете напряженных состояний грунтов вблизи работающего анкера возникла необходимость проведения аналогии силовых полей с потенциальными течениями. Но в основной теории потенциалов и теории потенциальных течений аналоговые характеристики имеют разную физическую сущность и размерность. Например, сила входит в аналогию со скоростью, а потенциальная энергия – с расходом или «потенциалом скорости». В некоторых задачах такая постановка затрудняет понимание физики явлений. Например, векторное сложение скоростей потенциальных потоков не соответствует реальным процессам. Складывать можно только квадраты скоростей или плотности количества движения.

В настоящей работе не ставится цель – внести коррективы в классическую теорию потенциальных полей. Приведен лишь вариант применения этой теории, в том числе в рамках моделей механики сплошных сред.

Изложим кратко отдельный фрагмент классической постановки теории.

Силовое поле называют потенциальным, если в каждой точке существует силовая функция U. Обычно она имеет размерность энергии Дж = = Н·м. Скалярное поле U образуется поверхностями уровней, где U = const, или поверхностями равных потенциалов Π = const (в плоских схемах соответственно линиями равных потенциалов). Силовые линии располагаются по нормали n к этим поверхностям. Нормальный вектор силы $\overline{F}_n$ в любой точке поля равен:

$$\overline{F}_n = \frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial \Pi}{\partial n} = -\mathrm{grad}_n \Pi . \qquad (1)$$

Для потенциального поля в любой точке ротор вектора силы

$$\mathrm{rot}\,\overline{F} = 0 . \qquad (2)$$

Как видим, в силовом поле производной от силовой функции U или от потенциальной энергии Π является сила $\overline{F}$. Понятие силового поля применимо к определенной точке, телу или системе тел, имеющих собственную или приведенную массу (коэффициент инерции). При существовании силового поля в сплошной среде следует рассматривать его действие на поверхностную или линейную плотность массы, т. е. на нормальную к силовым линиям площадку или линию. Тогда формула (1) для силового поля приобретает вид, характерный для полей:

пространственных:

$$\sigma_n = \frac{1}{b^2}\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{1}{b^2}\frac{\partial \Pi}{\partial n} = -\frac{1}{b^2}\,\mathrm{grag}_n \Pi ; \qquad (3а)$$

и плоских:

$$\sigma_n = \frac{1}{b}\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{1}{b}\frac{\partial \Pi}{\partial n} = -\frac{1}{b^2}\,\mathrm{grag}_n \Pi\,, \tag{3б}$$

где σ_n – нормальное сжимающее напряжение от источника потенциальной энергии в сплошной среде, имеющее размерность соответственно Н/м^2 и Н/м;

b – некоторый характерный линейный размер (масштабная единица длины).

Нормальный компонент напряжений распределяется по силовым линиям и может быть представлен как вектор

$$\vec{\sigma}_n = \vec{n}_0 \sigma_n\,, \tag{3в}$$

где $\vec{n}_0$ – нормальный единичный вектор к поверхностям или линиям уровня.

В потенциальных полях течений, имеющих одну и ту же математическую основу с силовыми полями, в качестве силовой функции U используют аналогичную величину Φ – потенциал скорости. Здесь существуют поверхности (или линии) равных потенциалов, где Φ имеет размерность объемного (м^3/с) или плоского расхода (м^2/с), а не энергии. Тогда в качестве градиента выступает нормальная скорость и формула (1) принимает вид

$$\upsilon_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\mathrm{grad}_n \Phi\,. \tag{4}$$

Линии тока (аналогичные силовым линиям) определяются функцией тока ψ, которые в каждой точке поля пересекаются с линиями равных потенциалов по нормали.

Потенциальное поле течений W находят по формуле

$$W = \Phi + i\psi. \tag{5}$$

При суммировании N полей ($k = 1, \ldots, N$) получают скалярную сумму

$$W = \sum_{k=1}^{N} W_k\,, \tag{6}$$

которая отражает суммарное поле и моделирует различные гидромеханические процессы.

Суммарное поле градиентов можно найти также векторным сложением полей:

$$\vec{\sigma}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{\sigma}_{nk}\,. \tag{7}$$

В теории потенциальных полей существует множество классических моделей (поступательный поток, источник, сток, диполь и др.), которые позволили решить ряд задач в области гидромеханики. Эти модели, на наш взгляд, можно применять и к расчету напряженных состояний сыпучих сред вблизи источника потенциальной энергии (анкеры, основания фундаментов и т. д.). Тогда необходимо эти поля привести к единой размерности, так как потенциал Φ не только не соответствует потенциальной энергии по физической сути, но и предполагает противоположное направление линий тока (от меньших значений Φ к большим).

В качестве варианта вместо указанного потенциала следует использовать аналоговую силовую функцию *U* или потенциальную энергию *П* с размерностью Дж. Тогда поле течений определяют воображаемыми поверхностями или линиями уровня. Здесь справедливы формулы (3а) и (3б). Нормальные напряжения σ_n имеют смысл не скорости потока υ_n, а нормального компонента давлений p_n. На основании известных уравнений Эйлера и Бернулли давление в полях течений преобразуют в динамическую характеристику – скоростной напор или плотность потока количества движения (с коэффициентом 1/2):

$$\sigma_n^* = \frac{\rho^* \upsilon_n^2}{2};$$

$$\vec{\sigma}_n^* = \vec{n}_0 \sigma_n^*, \tag{8}$$

где ρ^* – плотность жидкости, кг/м^3 или кг/м^2 соответственно для объемных и плоских полей.

Таким образом, динамическая характеристика поля течений σ_n^* приобретает размерность напряжений. Это поле в указанной интерпретации соответствует аналогичному полю распределения скоростей в классическом варианте. Важно отметить, что здесь выполняется закон сохранения количества движения, который не соблюдается в классических полях потенциальных скоростей.

В качестве примера возьмем поле *W* (вида «источник»), которое распространяется установившимся течением из одной точки по всем направлениям нормали *n*. Тогда плотность потока количества движения соответственно равна:

для объемных течений

$$\sigma_n^* = \frac{\rho^* \upsilon_n^2}{2} = \frac{a}{n^2}; \tag{9а}$$

для плоских

$$\sigma_n^* = \frac{\rho^* \upsilon_n^2}{2} = \frac{a}{n}, \tag{9б}$$

где *a* – параметр, зависящий от интенсивности источника;

n – нормальная координата поля течения, имеющая начало в «источнике», выраженная в масштабных линейных единицах.

Струйное затопленное течение можно приближенно моделировать как пространственный или плоский сектор от поля типа «источник». При этом зависимости (9а) и (9б) наблюдаются в распределении плотности потока количества движения в моделируемых или реальных струях [2], исходящих из объемного или плоского источника. В случае осесимметричной струи зависимость (9а) обратно пропорциональна n^2, а в случае плоской (9б) – обратная линейная.

Таким образом, по аналогии можно моделировать поле сжимающих напряжений от точечной или полосовой нагрузки (бесконечной длины), действующей на сплошную сыпучую среду. Нормальные сжимающие напряжения в этих условиях ведут себя так же, как плотность потока количества движения соответственно формулам (9а) и (9б) [4].

Поле нормальных (вертикальных) сжимающих напряжений от массива грунта образуется горизонтальными поверхностями или линиями равных потенциальных энергий. Силовые линии направлены вертикально вверх от больших значений *П* к меньшим. Это поле не является потенциальным, поэтому здесь авторы применяют термин «квазипотенциальное поле» [3]. Его отличают от потенциального поля типа «равномерный поступательный поток» интегрирующим множителем η, имеющим в пространстве различные значения.

Зададим масштабную единицу напряжений σ_0 в массиве грунта формулой

$$\sigma_0 = \rho g H, \qquad (10)$$

где ρ – плотность сыпучей среды;

g – ускорение свободного падения;

H – глубина заложения опоры (или мнимого источника), моделирующей действие полосовой нагрузки (струи).

Интегрирующий множитель примем равным

$$\eta = \frac{H - y}{H} = \frac{H - n}{H}, \qquad (11)$$

где y (или n) – вертикальная координата поля, восходящая от уровня глубины H.

Отвлекаясь от выражения для силовой функции или потенциальной энергии на различных глубинах грунтового массива, запишем формулу для поля нормальных (вертикальных) сжимающих напряжений в виде

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_0 \eta \vec{n}_0 = \rho g (H - y) \vec{n}_0 = \rho g (H - n) \vec{n}_0. \qquad (12)$$

Таким образом, распределение $\vec{\sigma}_n$ имеет характер гидростатического закона.

Суммирование полей напряжений от анкера (сектора источника) и массива грунта по аналогии с полями течений позволяет рассчитывать формы линий скольжения грунтовых призм при работе анкера. Расчет подробно изложен в работе [1]. Там же дан вариант расчета держащей силы анкера при различных грунтовых условиях и геометрических параметрах заложения.

Приведенный вариант интерпретации механики полей течений, на наш взгляд, может служить основой для решения ряда других физических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вихарев, А.Н.* Квазипотенциальное моделирование механических характеристик работы анкера в грунтах [Текст] / А.Н. Вихарев, П.Н. Гагарин // Совершенствование техники и технологии лесозаготовок и транспорта леса: сб. науч. тр.

сотрудников факультета природных ресурсов, посвящ. 70-летию АГТУ и ФПР. – Архангельск: Изд-во АГТУ, 1999. – С. 76–87.

2. *Ландау, Л.Д.* Теоретическая физика [Текст]: учеб. пособие. В 10 т. Т. 6. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 4-е изд., стер. – М.: Наука, 1988. – 736 с.

3. *Смирнов, В.И.* Курс высшей математики [Текст]. В 5 т. Т. 2. / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 655 с.

4. *Цытович, Н.А.* Механика грунтов (краткий курс) [Текст] / Н.А. Цытович: учеб. для вузов. – 3-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 1979. – 272 с.

Архангельский государственный
технический университет

Поступила 05.12.05

A.N. Vikharev, P.N. Gagarin

Simulation of Soil Stress near Working Anchor

The alternative model of bringing physics of flow fields to force fields is proposed to calculate the stress state of loose media (soils).