

УДК 621.001

А.В. Питухин

Питухин Александр Васильевич родился в 1948 г., окончил в 1972 г. Ленинградский политехнический институт, доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, заведующий кафедрой технологии металлов и ремонта Петро-заводского государственного университета. Имеет более 80 печатных трудов в области оценки надежности, расчета и проектирования машин.



МЕТОДЫ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ МАШИН И ОБОРУДОВАНИЯ ЛЕСНОГО КОМПЛЕКСА

Предложен метод оценки вероятности возникновения катастрофы сборки; проанализирована возможность применения методов теории катастроф для проектирования элементов конструкций машин и оборудования лесного комплекса.

Ключевые слова: теория катастроф, катастрофа сборки, проектирование, машины и оборудование лесного комплекса.

Введение в теорию катастроф

Катастрофами называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий [1, 2]. Создателями теории катастроф являются французский математик Р. Том [13] и российский математик В. Н. Арнольд [1, 2]. Большой вклад в ее развитие внесли Е. Зиман [12, 15], Т. Постон, И. Стюарт [8], Дж. М. Т. Томпсон [9].

Теория катастроф объяснила зависимость экспериментально наблюдаемых форм неустойчивости от числа управляющих параметров. Если имеется только один управляющий параметр, то можно наблюдать лишь катастрофу складки, если два – катастрофу сборки. В классификацию Тома [12] включены семь элементарных катастроф, которые можно наблюдать в окружающем нас мире при воздействии от одного до четырех управляющих параметров.

Большое значение имеет катастрофа сборки, потенциальную функцию которой определяют по формуле

$$V_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx, \quad (1)$$

а многообразие M катастрофы задают уравнением

$$0 = \frac{d}{dx}V_{ab}(x) = x^3 + ax + b. \quad (2)$$

Поведение поверхности равновесия (или многообразие катастрофы) с ее проекцией на плоскость ab , определяющую управляющие параметры a и b , иллюстрирует рис. 1.

Точка (a, b) , медленно изменяя свои координаты a и b , описывает некоторую траекторию на плоскости ab . Тогда наблюдаемое положение равновесия пройдет путь в M , лежащий над путем в ab . Из-за складок поверхности равновесия M этому пути, возможно, придется перескакивать с одного листа поверхности на другой. Это объясняется тем, что точки многообразия M , расположенной на внутренней поверхности складки, соответствуют неустойчивому состоянию системы. Такой скачок системы (катастрофа) наступает только при выходе из области I , так как у системы не остается другого выбора (принцип максимального промедления Тома). Путь на ab вместе с соответствующей траекторией на поверхности равновесия M показан на рис. 1.

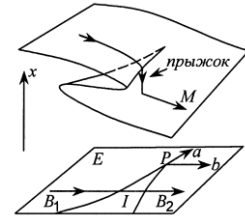


Рис. 1. Катастрофа сборки

ные на внутренней поверхности складки, соответствуют неустойчивому состоянию системы. Такой скачок системы (катастрофа) наступает только при выходе из области I , так как у системы не остается другого выбора (принцип максимального промедления Тома). Путь на ab вместе с соответствующей траекторией на поверхности равновесия M показан на рис. 1.

Кубическое уравнение (2) имеет от одного до трех вещественных корней, природа которых зависит от дискриминанта

$$D = 4a^3 + 27b^2. \quad (3)$$

Пространство управляющих параметров, образующих плоскость ab , разбивают на пять подмножеств: B_1, B_2, P, I, E , изображенных на рис. 1. Катастрофа происходит, когда траектория точки (a, b) покидает область I , при этом D меняет знак с отрицательного на положительный.

Моделирование различного рода систем (механических, термодинамических, экологических, социальных, экономических и др.), в которых плавное изменение параметров может повлечь за собой скачкообразное изменение состояния системы, приводит к описанию свойств этих систем с помощью гладкой функции V . В качестве такой функции используют полную энергию, потенциальную энергию, термодинамические потенциалы [5], функцию тока (геометрия жидкостей), функцию полезности (биология) и т. п. Теория катастроф уже находит применение при исследовании проблем устойчивости тонких упругих оболочек, стержней, пластин, в механике разрушения и т. д. [4, 6, 10, 11, 14]. Методы теории катастроф пока не доведены до решения инженерных задач, однако их можно было бы использовать при проектировании, в том числе, и элементов конструкций машин и оборудования лесного комплекса. Кроме того, совершенно не развит вероятностно-статистический подход. Поэтому развитие вышеуказанных направлений является целью настоящей статьи.

Оценка вероятности возникновения катастрофы сборки

Следует отметить, что изменения управляющих параметров могут быть случайными. Случайными величинами или случайными функциями можно описывать нагрузку, размеры самих элементов вследствие их рассеяния в пределах полей допусков, механические свойства материалов и т. д.

Поэтому представляется целесообразным рассмотреть с позиций теории катастроф вопросы проектирования элементов конструкций при наличии случайных возмущающих факторов.

Рассмотрим со стохастических позиций наиболее важную для практических целей катастрофу сборки (1). Как уже отмечалось, катастрофа происходит, когда траектория точки (a, b) покидает область I , а D меняет знак с отрицательного на положительный. Для определенности положим, что траектория пересекает линию B_2 слева направо. Вероятность возникновения катастрофы

$$\text{Pr} = \text{Pr}\{D > 0\}.$$

Решение этой задачи будет существенно зависеть от конкретных прикладных ситуаций. Рассмотрим случай, когда a и b – случайные величины с математическими ожиданиями \bar{a} и \bar{b} , дисперсиями σ_a^2 и σ_b^2 , плотностью распределения $f_1(a, b)$.

В работах автора [6, 7, 10, 11] для решения данной задачи предложены аналитический метод и метод статистической линеаризации. Оценим математическое ожидание и дисперсию с помощью метода статистической линеаризации:

$$\bar{D} = 4\bar{a}^3 + 27\bar{b}^2; \quad (5)$$

$$\sigma_D^2 = \left(\frac{d\bar{D}}{da}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{d\bar{D}}{db}\right)^2 \sigma_b^2 = 144a^{-4} \sigma_a^2 + 2916b^{-2} \sigma_b^2, \quad (6)$$

где \bar{D} и σ_D^2 – соответственно среднее и дисперсия D .

Для приближенной оценки вероятности катастрофы можно предложить распределение случайной величины D нормальным:

$$f_2(D) = \frac{1}{\sigma_D \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(D - \bar{D})^2}{2\sigma_D^2}\right].$$

В этом случае

$$\text{Pr} = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\bar{D}}{\sigma_D}\right), \quad (7)$$

где $\Phi(t)$ – функция Лапласа,

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\left(r^2/2\right)} dr.$$

Полученные зависимости (5), (6) и (7) позволяют оценить вероятность безотказной работы различных элементов конструкций машин и оборудования лесного комплекса. Весьма важна и задача оценки энергии деформирования элементов конструкций вплоть до их разрушения. Особенно это касается защитных каркасов кабин лесопромышленных тракторов [3].

Оценка вероятности безотказной работы стержня (пример)

Рассмотрим случай бокового нагружения кабины колесного лесопромышленного трактора ТЛК-1. В данной конструкции основные деформации будут воспринимать защитный каркас и болт его крепления к несущей раме (рис. 2). Несложным пересчетом заменяем защитный каркас эквивалентной пружиной с жесткостью G и деформируемой силой F . Болт моделируем стержнем. Таким образом, получаем условную схему нагружения (рис. 3), энергетически эквивалентную исходной.

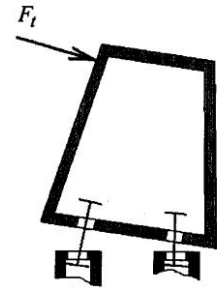


Рис. 2. Схема нагружения кабины трактора стержня растя-

Представим сопротивление сжатия в виде зависимости

Рис. 3. Условная схема нагружения кабины трактора



$$F = Ax - Cx^3, \tag{8}$$

где F – нагрузка;

A и C – эмпирические коэффициенты;

x – абсолютное удлинение стержня.

Диаграмма растяжения стержня, описываемая зависимостью (8), представлена на рис. 4. Такие полные диаграммы деформирования (с падающей ветвью) могут быть получены на испытательных установках с большой жесткостью. В нашем случае жесткость защитного каркаса должна существенно превышать жесткость болта.

Полная потенциальная энергия системы определяется произведением соответствующих сил на перемещения:

$$V = \frac{1}{2} Q(z - x) + \frac{1}{2} Fx,$$

где Q – сила сопротивления деформации эквивалентной пружины;

z – условное перемещение активного конца эквивалентной пружины.

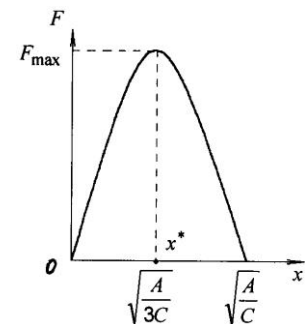


Рис. 4. Полная диаграмма растяжения стержня

Выразив силы через перемещения, будем иметь

$$2V = G(z - x)(z - x) + (Ax - Cx^3)x.$$

После преобразований получим

$$2V = -Gx^4 + (A + C)x^2 - 2Gxz + Gz^2.$$

Аналогичное выражение описывает катастрофу сборки. Поверхность равновесия M определяется уравнением

$$\frac{dV}{dx} = x^3 + ax + b = 0,$$

где $a = \frac{A + G}{2C}$; $b = \frac{Gz}{2C}$.

Пусть A , C , G и z – случайные величины со средними \bar{A} , \bar{C} , \bar{G} , \bar{z} и дисперсиями σ_A^2 , σ_C^2 , σ_G^2 , σ_z^2 . Согласно методу статистической линеаризации,

$$\bar{a} = \frac{\bar{A} + \bar{G}}{2\bar{C}}; \quad \sigma_a^2 = \frac{1}{4\bar{C}^2} \left[\sigma_A^2 + \sigma_G^2 + \left(\frac{\bar{A} + \bar{G}}{\bar{C}} \right) \sigma_C^2 \right]; \quad (9)$$

$$\bar{b} = \frac{\bar{G}\bar{z}}{2\bar{C}}; \quad \sigma_b^2 = \frac{1}{4\bar{C}^2} \left[\bar{z}^2 \sigma_G^2 + \bar{G}^2 \sigma_z^2 + \left(\frac{\bar{G}\bar{z}}{\bar{C}} \right) \sigma_C^2 \right]. \quad (10)$$

Используя формулы (5)–(7) и (9), (10), можно определить вероятность катастрофы (разрушения болта).

Численное решение задачи целесообразно осуществлять в следующем порядке: определить жесткость G эквивалентной пружины; оценить коэффициенты A и C в полной диаграмме растяжения стержня (8); задать значения средних квадратических отклонений G , A и C ; составить компьютерную программу, реализующую алгоритм оценки вероятности возникновения катастрофы сборки (формулы (9), (10) и (5)–(7)); произвести соответствующие расчеты.

Численное значение жесткости G эквивалентной пружины целесообразно определять методом конечных элементов, что и было осуществлено с использованием пакета «Зенит». Расчетное значение жесткости эквивалентной пружины $G = 8700$ Н/мм.

Определим коэффициенты A и C в полной диаграмме растяжения стержня. Для этого пересчитаем F_{\max} и x^* для стержня, моделирующего болт, через предел прочности σ_B и относительное удлинение δ стали 30 (согласно справочным данным, $\sigma_B = 500$ МПа, $\delta = 20$ %). При диаметре стержня $d = 30$ мм и длине $l = 100$ мм определим максимальную разрушающую стержень нагрузку и соответствующее ей абсолютное удлинение:

$$F_{\max} = \frac{\pi d^2}{4} \sigma_B = 353\,000 \text{ Н};$$

$$x^* = l\delta/100 = 20 \text{ мм}.$$

Подставляя численные значения x^* и F_{\max} и решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^* = \sqrt{\frac{A}{3C}}; \\ F_{\max} = Ax^* - Cx^{*3}, \end{cases}$$

получаем $A = 26\,500$ Н/мм и $C = 22,1$ Н/мм³.

Окончательно зависимость нагрузки от абсолютного удлинения стержня

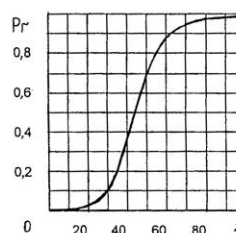
$$F = 26500x - 22,1x^3.$$

Значения G , A и C полагаем случайными величинами со средними, подсчитанными выше, и коэффициентом вариации $v = 0,1$.

Таким образом, численные значения задаем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= 26\,500 \text{ Н/мм}; \quad \bar{C} = 22,1 \text{ Н/мм}^3; \quad \bar{G} = 8\,700 \text{ Н/мм}; \\ \sigma_A &= 2\,650 \text{ Н/мм}; \quad \sigma_C = 2,21 \text{ Н/мм}^3; \quad \sigma_G = 870 \text{ Н/мм}; \quad \sigma_z = 0,1 \bar{z} \text{ мм}. \end{aligned}$$

Рис. 5. Вероятность разрушения стержня



Результаты расчетов представлены на рис. 5.

Рассмотренный пример иллюстрирует возможность применения теории катастроф для оценки вероятности безотказной работы элементов конструкций машин и оборудования лесного комплекса при проектировании. Задача оценки энергии деформирования каркаса кабины решена в работе автора [6].

Предложенный подход позволяет произвести статистический анализ положений равновесия вблизи критических точек, что важно для практических целей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд, В.Н. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k , D_k , E_k и лагранжевы особенности [Текст] / В.Н. Арнольд // Функцион. анализ и его приложение. – 1972. – Т. 6, вып. 4. – С. 3–25.
2. Арнольд, В.Н. Теория катастроф [Текст] / В.Н. Арнольд. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
3. ГОСТ 12.2.102–89. Машины и оборудование (лесозаготовительные и лесосплавные, тракторы лесопромышленные). Требования безопасности, методы контроля требований безопасности и оценки безопасности труда [Текст]. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 70 с.

4. *Маркочев, В.М.* Теория катастроф и механика разрушения [Текст] / В.М. Маркочев // Проблемы прочности. – 1985. – № 7. – С. 43–47.
5. *Павлов, С.В.* Методы теории катастроф в исследовании фазовых переходов [Текст] / С.В. Павлов. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 104 с.
6. *Питухин, А.В.* Оценка надежности элементов конструкций лесных машин с позиции теории катастроф [Текст] / А.В. Питухин // Теория, проектирование и методы расчета лесных и деревообрабатывающих машин: тез. докл. Всерос. науч.-техн. конф. – М.: МГУЛ, 1997. – С. 18–19.
7. *Питухин, А.В.* Вероятностно-статистические методы механики разрушения и теории катастроф в инженерном проектировании [Текст] / А.В. Питухин. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 1998. – 304 с.
8. *Постон, Т.* Теория катастроф и ее приложения [Текст] / Т. Постон, И. Стюарт; пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
9. *Томпсон, Дж. М.Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике [Текст] / Дж. М.Т. Томпсон; пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
10. *Pitukhin, A.V.* Application of Cusp Catastrophe Theory in Engineering Design [Text] / A.V. Pitukhin // The Third World Congress on Computational Mechanics, Extended Abstracts (August 1-5). – Chiba, Japan, 1994. – Vol. II. – P. 1259–1260.
11. *Pitukhin, A.V.* Stochastic Cusp Catastrophe and Engineering Design [Text] / A.V. Pitukhin // Education, Practice and Promotion of Computational Methods in Engineering Using Small Computers: (1-4 August 1995). – Proceedings of the Fifth EPMESC Conference, Macao. – Vol. 2. – P. 897–902.
12. *Thom, R.* Catastrophe theory: its present state and future perspectives [Text] / R. Thom, E.C. Zeeman // In Dynamical Systems Warwick, 1974. Lecture Notes in Mathematics: Springer. – Berlin; London, 1975. – P. 366–389.
13. *Thom, R.* Stabilité structurelle et morphogenèse [Text] / R. Thom. – New York: Benjamin, 1972. – 362 p.
14. *Thompson, J.M.T.* Elastic Instability Phenomena [Text] / J.M.T. Thompson, G.W. Hunt. – London: Jhon Wiley and Sons, 1984.
15. *Zeeman, E.C.* Catastrophe theory: Selected Papers, 1972 [Text] / E.C. Zeeman. – Addison-Wesley, Reading Mass, 1977.

Петрозаводский государственный
университет

Поступила 24.08.05

A.V. Pitukhin

Methods of Catastrophe Theory when Designing Elements of Machines and Equipment of Forest Industry

Method of estimated probability is provided for assembly-type catastrophe beginning; possibility of applying catastrophe theory methods for designing elements of machines and equipment of forest industry is analyzed.