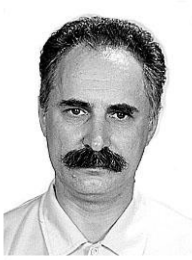
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ОБМЕН ОПЫТОМ

УДК 519.653

А.Ю. Вдовин, С.С. Рублева



Вдовин Андрей Юрьевич родился в 1957 г., окончил в 1980 г. Уральский государственный университет им. Горького, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики Уральского государственного лесотехнического университета. Имеет более 30 печатных работ в области численных методов решения обратных задач динамически управляемых систем.

Рублева Светлана Сергеевна родилась в 1982 г., окончила в 2004 г. Уральский государственный университет им. Горького, ассистент кафедры высшей математики Уральского государственного лесотехнического университета. Область научных интересов – численные методы реализации динамически регуляризируемых алгоритмов.

О ДИНАМИЧЕСКОМ АЛГОРИТМЕ НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Предложен устойчивый алгоритм численного дифференцирования неточно заданной функции, не использующий разностное отношение.

Ключевые слова: численное дифференцирование, динамический регуляризирующий алгоритм, управление моделью.

Нами рассмотрена задача численного дифференцирования:

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}, \quad t \in [0,T], \quad v(0) = 0,$$

где неизвестное $v(\cdot)$ в общем случае является ограниченной кусочно-непрерывной слева функцией. Вместо функции $x(\cdot)$ доступна $\xi(\cdot)$, для которой $\xi(t) = \xi(t_i)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$ (где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$; $t_{i+1} - t_i = \Delta$) и $|\xi(t_i) - x(t_i)| \le h > 0$. Естественно предполагать, что к моменту времени t известны $\xi(t_i)$ для $t_i < t$. Решение этой некорректной проблемы в классической постановке [4] использует конечномерную аппроксимацию и сводится к экстремальной задаче в соответствующем пространстве. Негативным моментом такого подхода является рост размерности при уменьшении h (проклятие размерности).

Этого недостатка лишены методы, сочетающие элементы теорий некорректных задач и позиционных дифференциальных игр, впервые предложенные в [2].

Будем использовать характерную для позиционных дифференциальных игр систему-модель:

$$\begin{cases} w'(t) = u(t) \\ w(0) = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, T].$$

Движение $w(t)$ будем удерживать вблизи $x(t)$ за счет выбора $u(t) = u(t_i)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = \overline{0, n-1}$. Построенное $u(t)$ будет являться искомым приближением для $v(t)$.

Пусть $\alpha > 0$. Введем согласование параметров h, α и Δ: пусть $a(h) \to 0$, $\dfrac{h}{\alpha(h)} \to 0$ при $h \to 0$, $\Delta = h$.

Схема алгоритма

На промежутке $[t_0, t_1)$ полагаем $u(t) = 0$, далее

$$w(t_{i+1}) = w(t_i) + u(t_i)\Delta \text{ для } i = \overline{0, n-2};$$

$$u(t_{i+1}) = \frac{2}{\pi\alpha}(\xi(t_i) - w(t_i) + D_1(t_i) + D_2(t_i) + D_3(t_i)),$$

где

$$D_1(t_i) = \frac{2}{\pi\alpha}\int_0^{t_i} \xi(s)\left(1 + \left(\frac{t_i - s}{\alpha}\right)^2\right)^{-1} ds;$$

$$D_2(t_i) = -\frac{4}{\pi\alpha}\int_0^{t_i} \xi(s)\left(1 + \left(\frac{t_i - s}{\alpha}\right)^2\right)^{-1}\left(\frac{t_i - s}{\alpha}\right)\operatorname{arcctg}\left(\frac{t_i - s}{\alpha}\right) ds;$$

$$D_3(t_i) = -\frac{4}{\pi\alpha}\int_0^{t_i}\left(\xi(s)\left(1 + \left(\frac{t_i - s}{\alpha}\right)^2\right)^{-1}\left(\frac{t_i - s}{\alpha}\right)\left(\frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{t_i - s}{\alpha}\right)^2\right)^{-1} - \operatorname{arcctg}\left(\frac{t_i - s}{\alpha}\right)\right)\right) ds \cdot$$

Подчеркнем, что к моменту времени t_{i+1} наличествует вся необходимая информация для вычисления $u(t_{i+1})$. Следовательно, при достаточном быстродействии вычислительного устройства нахождение производной может быть реализовано динамически (в темпе реального времени). Таким образом, алгоритм описан конструктивно.

Пусть

$$\begin{cases} \overline{w}'(t) = \overline{u}(t) \\ \overline{w}(0) = 0 \\ \overline{u}(0) = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, T] \text{ и}$$

$$\overline{u}(t) = \frac{2}{\pi\alpha}(x(t) - \overline{w}(t) + \overline{D_1}(t) + \overline{D_2}(t) + \overline{D_3}(t)), \qquad (1)$$

где $\overline{D_i}(t)$ (i = 1, 2, 3) вычисляются аналогично $D_i(t)$ заменой $\xi(s)$ на $x(s)$. Несложно убедиться, что при $h \to 0$ $u(t) - \bar{u}(t) \to 0$ почти всюду.

Обсудим сходимость приближения $u(t)$ к $v(t)$ при $h \to 0$. Для этого покажем, что $\bar{u}(t) - v(t) \to 0$ при $h \to 0$:

$$\overline{D_1}(t) + \overline{D_2}(t) + \overline{D_3}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \left(x(s)\left(1 + \left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^2\right)^{-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\alpha^2}\int_0^s x(l)\left(1 + \left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^2\right)^{-2} (s-l)\,dl \right)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\operatorname{arcctg}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\right)ds.$$

Применим к интегралу $\frac{2}{\alpha^2}\int_0^s x(l)\left(1 + \left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^2\right)^{-2} (s-l)\,dl$ метод интегрирования по частям:

$$\overline{D_1}(t) + \overline{D_2}(t) + \overline{D_3}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^s v(l)\left(1 + \left(\frac{t-l}{\alpha}\right)^2\right)^{-1} dl \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\operatorname{arcctg}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\right)ds.$$

К полученному интегралу снова применим метод интегрирования по частям:

$$\overline{D_1}(t) + \overline{D_2}(t) + \overline{D_3}(t) = -\alpha\int_0^t \operatorname{arcctg}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\left(1 + \left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^2\right)\frac{2}{\pi\alpha} \times$$

$$\times\left(1 + \left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^2\right)^{-1} v(s)ds + \alpha\bar{u}(t)\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha\pi}{2}\bar{u}(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^t \operatorname{arcctg}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)v(s)ds =$$

$$= \frac{\alpha\pi}{2}\bar{u}(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^t \left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) - \frac{\pi}{2}\right)v(s)ds - \int_0^t v(s)ds =$$

$$= \frac{\alpha\pi}{2}\bar{u}(t) + \frac{2}{\pi}\int_0^t \operatorname{arctg}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)v(s)ds - x(t).$$

Подставим найденную сумму в уравнение (1):

$$\bar{u}(t) = \frac{2}{\alpha\pi}\left(x(t) - \bar{w}(t) + \frac{2}{\pi}\int_0^t \operatorname{arctg}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)v(s)ds - x(t) + \frac{\alpha\pi}{2}\bar{u}(t)\right),$$

тогда

$$\bar{w}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \operatorname{arctg}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)v(s)ds.$$

Заметим, что $\operatorname{arctg}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}\int_s^t\left(1+\left(\frac{l-s}{\alpha}\right)^2\right)^{-1}dl$, следовательно

$$\bar{w}(t)=\frac{2}{\pi\alpha}\int_0^t\int_s^t\left(1+\left(\frac{l-s}{\alpha}\right)^2\right)^{-1}v(s)dlds.$$

Изменив порядок интегрирования, будем иметь

$$\bar{w}(t)=\frac{2}{\pi\alpha}\int_0^t\int_0^l\left(1+\left(\frac{l-s}{\alpha}\right)^2\right)^{-1}v(s)dsdl.$$

Продифференцируем последнее равенство:

$$\bar{u}(t)=\frac{2}{\pi\alpha}\int_0^t\left(1+\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^2\right)^{-1}v(s)ds. \qquad (2)$$

Отметим, что указанный сингулярный интеграл отличается от общеупотребительных тем, что является неупреждающим (т.е. не использует информацию после момента времени *t*). Ядро интеграла (2) обладает свойствами, рассмотренными в [3]. Поэтому имеет место следующая теорема для $t\in[0,T]$, при котором функция $v(t)$ непрерывна слева: $\lim\limits_{h\to 0}\bar{u}(t)=v(t)$, а значит $\lim\limits_{h\to 0}u(t)=v(t)$.

Доказательство теоремы фактически повторяет доказательство, приведенное в [3].

Замечание. $\alpha(h)$ рекомендуется полагать равным $h^{2/3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский, Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата [Текст] / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1985. – 518 с.

2. *Кряжимский, А.В.* О моделировании управления в динамической системе [Текст] / А.В. Кряжимский, Ю.С.Осипов // Техн. кибернетика – 1983. – № 2. – С. 51–60. – (Изв. АН СССР).

3. *Натансон, И.П.* Теория функций вещественной переменной [Текст] / И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 340 с.

4. *Тихонов, А.Н.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация [Текст] / А.Н. Тихонов [и др.]. – М.: Наука, 1983. – 198 с.

A.Yu. Vdovin, S.S. Rubleva

On Dynamic Algorithm of Derived Function Determination

Durable algorithm of numerical differentiation for inexact given function not using difference coefficient is proposed.