

УДК 674.047

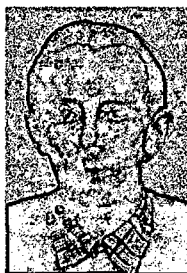
*Я.И. СОКОЛОВСКИЙ, Б.П. ПОБЕРЕЙКО*

Украинский государственный лесотехнический университет

Соколовский Ярослав Иванович окончил Национальный университет им. Т. Шевченко (г. Киев), кандидат физико-математических наук, докторант кафедры автоматизации производственных процессов электро- и теплотехники Украинского государственного лесотехнического университета. Имеет более 30 научных трудов в области механики композитных материалов.



Поберейко Богдан Петрович окончил Государственный университет им. И. Франко, аспирант кафедры автоматизации производственных процессов электро- и теплотехники Украинского государственного лесотехнического университета. Имеет около 10 научных трудов в области механики композитных материалов.



## РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ДРЕВЕСИНЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВЛАГИ

Исследовано распределение напряжений в древесной пластине при воздействии влаги с учетом вязкоупругих свойств, реологическое соотношение для которых получено на основании применения принципа влажностно-временной аналогий.

The distribution of stress in the wood plate under the moisture impact has been investigated taking into account viscoelastic properties, the rheological ratio for them being obtained based on the moisture-time analogy use.

Важнейшей проблемой при изучении закономерностей технологических процессов сушки и тепловой обработки древесины является разработка методов расчета напряжений, вызванных наличием влаги. Она приводит к набуханию древесины и изменяет ее физико-механические свойства. В силу малости величины скорости диффузии влаги в полимерных материалах, к которым относится и древесина, изменение полей влажности и определяемых по ним влажностных напряжений носит нестационарный характер. Вследствие полимерной природы основных компонентов древесины проявляются ее реологические свойства. Можно считать, что продолжительность

сорбции влаги и выравнивание полей ее концентраций, как правило, сопоставимы с временем релаксации напряжений в древесных материалах. Важно также отметить, что увеличение влагосодержания ускоряет релаксационные процессы при гидротермической обработке древесины. Цель данной работы – исследование нестационарных влажностных напряжений в древесной пластине с учетом проявления ее вязкоупругих свойств.

В общем случае, согласно термодинамике необратимых процессов, строгая постановка задачи для нахождения полей влагосодержания  $U$  и температуры  $T$  при сушке и нагревании влажных тел связана с решением системы дифференциальных уравнений [3]. Применительно к неограниченной пластине их можно записать в следующем виде:

$$C\rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \varepsilon r \rho_0 \frac{\partial U}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a_m \lambda \frac{\partial U}{\partial x} + a_m \delta \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Коэффициенты влаго- и теплопереноса  $a_m$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$  зависят от влагосодержания и температуры так же, как и термодинамические характеристики  $C$ ,  $r$ ,  $\varepsilon$ .

Влияние взаимосвязи диффузии тепла и влаги на распределение напряжений в полимерной пластине рассмотрено в работе [6]. При малых значениях соотношения коэффициентов диффузии влаги и тепла эффектами, проявляющимися вследствие связи, можно пренебречь [8]. Такое допущение имеет место в случае низкотемпературного процесса при  $W_n > W_{п.н}$  ( $W_n$  – начальная влажность,  $W_{п.н}$  – предел насыщения клеточных стенок) с подвижными границами фазовых переходов на уровне  $W = W_{п.н}$ , а также в случае сушки древесины при  $W < W_{п.н}$  для процессов, не сопровождаемых движением границ фазовых переходов. Поэтому термические эффекты, вызванные концентрационной диффузией влаги, исчезают практически мгновенно, и наоборот, в процессе теплопроводности перенос тепла осуществляется столь быстро, что связанное с ним движение влаги оказывается несущественным. Следовательно, система (1) может быть представлена в виде двух несвязанных уравнений:

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = a_m \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Так как в рассматриваемых случаях температурное поле практически стабильно  $\left( \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \right)$ , то распределение влаги  $U(t,x)$  определим из первого уравнения системы (2) при граничных условиях III рода:

$$a_m \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha' (U_R - U_p), \quad (3)$$

где  $\alpha$  – коэффициент влагообмена;  
 $U_R$  – влагосодержание поверхности;  
 $U_P$  – равновесное влагосодержание.

При граничных условиях (3) решение уравнения (2) имеет вид [5]:

$$U(t, x) = U_P + (U_H - U_P) \left( 1 - \operatorname{erfc} \frac{1 - (x/R)}{2\sqrt{Fo}} + \exp \left( \operatorname{Bi} \left( 1 - \frac{x}{R} \right) + \operatorname{Bi}^2 Fo \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{1 - (x/R)}{2\sqrt{Fo}} + \operatorname{Bi} \sqrt{Fo} \right) - \operatorname{erfc} \frac{(1 - (x/R))}{2\sqrt{Fo}} + \exp \left( \operatorname{Bi} \left( 1 + \frac{x}{R} \right) + (\operatorname{Bi})^2 Fo \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{(1 + (x/R))}{2\sqrt{Fo}} + 2\operatorname{Bi} \sqrt{Fo} \right) \right),$$

где  $U_H$  – начальное влагосодержание;  
 $\operatorname{erfc}(z)$  – дополнительный интеграл вероятности,

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy;$$

$R$  – половина толщины пластины;  
 $Fo, \operatorname{Bi}$  – критерии Фурье и Био,  
 $Fo = a_m t / R^2; \operatorname{Bi} = \alpha' R / a_m.$

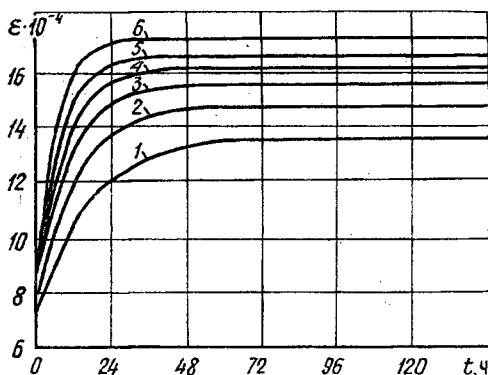
После определения влажностных полей перейдем к нахождению напряженно-деформируемого состояния древесной пластины, вызванного воздействием влаги при отсутствии внешних механических нагрузок. Примем, что пластина обладает свойствами линейной вязкоупругости с соблюдением влажностно-временной аналогии [2].

Для определения влажностных напряжений используем метод тонких сечений [10], согласно которому пластина делится на тонкие слои  $dx$ . Вязкоупругое деформирование слоев описывается линейным интегральным уравнением наследственного типа

$$\varepsilon_{ij}(t, x) = \int_0^t R_{ijkl} [t - \tau, U(\tau, t)] d\sigma_{kl}(\tau, x) + \beta_{ij} [U(t, x) - U_0], \quad (5)$$

где  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{kl}$  – тензоры деформаций и напряжений в слое;  
 $R_{ijkl}(t, U)$  – функции ползучести;  
 $R_{ijkl}(0, U)$  – тензор податливости,  $R_{ijkl} = A_{ijkl}.$

Рис. 1. Кривые развития деформаций ползучести вдоль волокон древесины сосны при  $\sigma = 0,11$  МПа в зависимости от влажности: 1 –  $U = 10\%$ ; 2 –  $15\%$ ; 3 –  $20\%$ ; 4 –  $25\%$ ; 5 –  $30\%$ ; 6 –  $40\%$  ( $t$  – диапазон времени)



Для изотропного материала имеем

$$A_{iii} = E^{-1}; A_{ijj} = 2(1+\nu)/E; \beta_{ii} = \beta; \beta_{ij} = 0; R_{iii}(t, U) = R(t, U),$$

где  $E, \nu$  – соответственно модуль упругости и коэффициенты Пуассона.

Важнейшим этапом при решении задачи является определение функции  $R(t, U)$ , которая описывает вязкоупругое поведение древесины в условиях влажностно-временных изменений деформируемости. Исходя из предположения, что древесная пластина – линейное вязкоупругое тело, используем метод влажностно-временной аналогии. Сущность этого метода состоит в том, что для прогнозирования длительной деформируемости при изменении фактора влажностно-механического нагружения  $f$  кривые вязкоупругой податливости смещаются вдоль логарифмической шкалы времени на величину  $\ln a_f$ , т.е. имеет место соотношение

$$R(\ln t, f) = R(\ln t + \ln a_f, f_0),$$

где  $f_0$  – фактор влажности  $U_0$  и напряжения  $\sigma$  в начальный момент времени.

Методом влажностно-временной аналогии исследованы экспериментальные кривые ползучести (рис. 1), полученные при одинаковом сжимающем напряжении  $\sigma = 110 \text{ кг/см}^2$ , постоянной температуре  $T=20^\circ \text{C}$  и меняющемся дискретно с шагом 2,5 % поле влажности 10...40 % для древесины сосны. Для определения  $\ln a_U(U)$  (где  $a_U$  – коэффициент влажностно-временной редукции) кривые ползучести переведены в полулогарифмические координаты  $R(t) - \ln(t)$  (рис. 2). Базовую кривую выбираем при  $U=U_0=10\%$ . Измеряя расстояние между базовой кривой и кривой ползучести, соответствующей влажности  $U$ , получаем значения  $\ln a_U$  в зависимости от  $U$  и  $U_0$ . Используя метод наименьших квадратов, имеем

$$\ln a_U = \ln \left( \left( \frac{10}{U} \right)^{0,68} \frac{\ln(1 - E(U)/E_0) - \ln(1 - E(U))}{\ln(1 - E(U_0)/E_0) - \ln(1 - E(U_0))} \right), \quad (6)$$

где  $E(U) = 0,6 + 1,63 \exp(-0,5\sqrt{U})$ ;  $E_0 = 1,63$ .

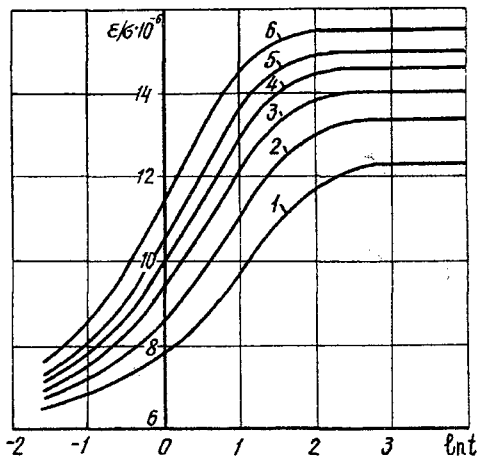


Рис. 2. Кривые вязкоупругой податливости в полулогарифмической шкале времени (см. обозначения кривых на рис. 1)

Ядро ползучести для сосны в зависимости от влажности  $U$  и времени  $t$  с учетом влажностно-временной аналогии

$$R(T_0, U, t) = R_0(U) + \frac{R(T_0, U_0)}{N} \left( N - \sum_{i=1}^N \exp\left(-\frac{ta_U}{\tau_i}\right) \right), \quad (7)$$

где  $R_0(U)$  – мгновенная податливость;

$R(T_0, U_0)$  – равновесная податливость;

$N$  – число членов релаксационного дискретного ряда  $(1 - \exp(-ta_U / \tau_i))$ ;

$\tau_i$  – время релаксации.

Для оценки дискретных значений релаксационного спектра использована методика [4], основанная на графическом определении реологических коэффициентов, входящих в уравнение (7). Число дискретных значений времени релаксации выбираем в зависимости от точности аппроксимации кривой ползучести и продолжительность этого процесса. Сравнивая точность полученных экспериментальных данных с отклонениями расчетных кривых, получаем  $N = 6$ .

Исходя из того, что древесная пластина с неоднородным влажностным полем условно состоит из слоев  $dx$  с различающимися в каждый момент времени вязкоупругими свойствами, и учитывая условия равновесия и совместимости деформаций

$$\frac{1}{n} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(t, x) dx = 0; \quad \varepsilon_{ij}(t, x) = \langle \varepsilon_{ij}(t, x) \rangle,$$

задачу вязкоупругости такой пластины можно привести к задаче упругости слоистой среды применением интегрального преобразования Лапласа. Решение для напряжений в пространстве изображений имеет вид

$$\bar{\sigma}_x(p, x) = \bar{\sigma}_y(p, x) = p \left( C_{xxxx}(p) + C_{xxyy}(p) - 2 \frac{\bar{C}_{xxyy}(p)}{C_{xxxx}(p)} \right) \times \\ \times \beta(U(\dot{p}) - U(p, z)); \quad \bar{\sigma}_z(p, z) = 0, \quad (8)$$

где  $p \bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl} - \bar{K}_{ijkl}(p)$ ;

$$\bar{C}_{ijkl} = p^{-2} \bar{R}_{ijkl}(p);$$

$$\langle U(p) \rangle = \frac{1}{h} \int_{h/2}^{h/2} U(p, z) dz;$$

$C_{ijkl}$  – тензор жесткости материала;

$K_{ijkl}$  – тензор револьвенты ядра ползучести;

$p$  – параметр преобразования по Лапласу.

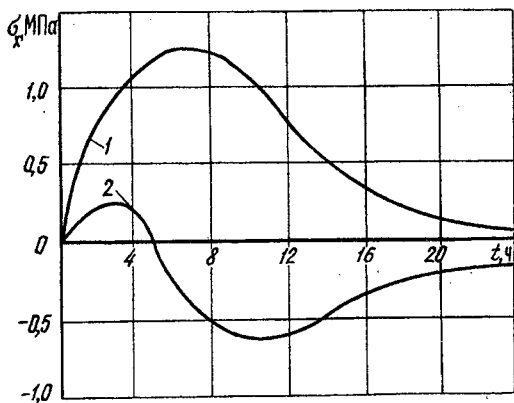


Рис. 3. Распределение напряжений в пластине: 1 — поверхностный слой; 2 — в сечении  $z/h = 0,8$  ( $h$  — толщина пластины).

При нахождении значений функций оригиналов численным обращением преобразования Лапласа использовали алгоритм, предложенный в работе [7]. Его апробацию предварительно проводили при определении влажностных полей  $U(t,z)$  по формулам (4). Сравнивая результаты аналитических [3] и численных значений  $U(t,z)$  при представляющих практический интерес диапазонах времени  $t$ , получаем погрешность, не превышающую 5 %.

На рис. 3 приведены графические зависимости изменения напряжений  $\sigma_x$  во времени в сечениях пластины. В поверхностном слое пластины (кривая 1) влажностные напряжения являются растягивающими. При этом на начальной стадии увеличиваются, достигая максимума, затем монотонно уменьшаются. Постепенное продвижение диффундирующей влаги вызывает в некоторых сечениях пластины изменение напряжений, сопровождающееся сменой их знака. Например, в сечении  $z/h = 0,8$  ( $h$  — толщина пластины, кривая 2) сначала возникают и потом увеличиваются растягивающие напряжения, в дальнейшем они уменьшаются до нуля, и появляются напряжения сжатия. Сжимающие напряжения увеличиваются, достигая максимального уровня, после чего постепенно уменьшаются.

Таким образом, полученные результаты позволяют судить о достаточно сложном характере изменения полей напряжений, вызываемых диффузией влаги в материале.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Билей П.В. Сушка древесины твердых лиственных пород. - М.: Экология, 1992. - 224 с. [2]. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. - М.: Наука, 1970.-231 с. [3]. Лыков А.Е Теория сушки. - М.: Энергия, 1968. - 471 с. [4]. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. - Рига: Зинатне, 1972. - 500 с. [5]. Уголев Б.Н., Лапшин Ю.Г., Кротов Е.В. Контроль напряжений при сушке древесины - М.: Лесн. пром-сть, 1980. - 208 с. [6]. Хартраф Р., Си Д. Влияние связанности процессов диффузии тепла и влаги на напряженное состояние пластины // Механика композитных материалов. - 1980.

- № 1. - С.53-61. [7]. Штраус В. Д. Вычисление временных функций наследственности путем применения обратного преобразования Лапласа // *Механика композитных материалов*. - 1980. - № 1. - С. 148-152. [8]. Шубин Г. С. Физические основы и расчет процессов сушки древесины. - М.: Лесн. пром-сть, 1973. - 248 с. [9]. Plume, Maksimov R.D. Nonstationary stresses in polymer plumes affected by moisture concentration // *Mech. of Composite Materials*. - 1992. - N 2. - P.172-178. [10]. Shaffer D. W. Elasto-plastic stress distribution within reinforced plastics loaded normal to its internal filaments // *AIAA J.* - 1968. - Vol.6; N 12. - P. 2316-2324.
- 

Поступила 3 июня 1996 г.