УДК 630*377.44

***Н.А.Иванов, Е.А. Мясников***

Иванов Николай Алексеевич родился в 1951 г., окончил в 1973 г. Ленинградскую лесотехническую академию, кандидат технических наук, доцент кафедры технологии и оборудования лесопромышленного производства Хабаровского государственного технического университета. Имеет более 30 печатных работ в области транспорта лесных предприятий.

Мясников Евгений Анатольевич родился в 1967 г., окончил в 1989 г. Дальневосточный государственный университет, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Хабаровского государственного технического университета. Имеет около 10 печатных работ в области математического анализа.

# ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕОДОЛЕНИЯ ВЕЗДЕХОДОМ ЛЕСИСТОЙ МЕСТНОСТИ

Представлены результаты теоретических исследований вероятности преодоления лесистой местности легким трехколесным вездеходом на пневматиках низкого давления при высокой маневренности.

*Ключевые слова*: вездеход, проходимость, маневренность, вероятность, деревья.

### *Проходимость при высокой маневренности*

Движение вездехода по лесистой местности в условиях ограниченной маневренности маловероятно и практически трудновыполнимо. Действительному движению больше соответствует задача о выборе заранее пути в пределах обзора местности водителем. При возникновении на пути непреодолимых препятствий (в виде деревьев) вездеход может найти другой путь, сделав один шаг назад. Возможность такого маневра обеспечивается при наличии заднего хода в силовой передаче вездехода.

Пусть в некоторый момент вездеход находится в точке $A$ (рис. 1). Считаем, что из этой точки возможно движение влево, вправо и вперед, а вероятность такого движения обозначим $B_1$, $B_2$, $B_3$.

Перейдя в точки $A_1$, $A_2$ или $A_3$ с вероятностью $P_1 = 1 - (1 - B_1)\times\times(1 - B_2)(1 - B_3)$, вездеход может вновь выбрать одно из трех направлений с вероятностью $B_1$, $B_2$, $B_3$.

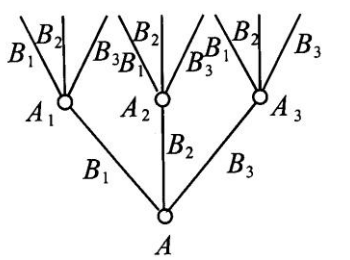


Рис. 1. Схема возможных перемещений вездехода

Если считать, что вероятность $P_1$ продвижения на один шаг не зависит от номера шага (что соответствует случайному расположению деревьев на участке), то вероятность движения по каждому из трех возникших разветвлений также равна $P_1$. Тогда движение из точки $A$ по левому направлению составит

$$B_1P_1 = B_1[1 - (1 - B_1)(1 - B_2)(1 - B_3)];$$

по среднему

$$B_2P_1 = B_2[1 - (1 - B_1)(1 - B_2)(1 - B_3)];$$

по правому

$$B_3P_1 = B_3[1 - (1 - B_1)(1 - B_2)(1 - B_3)].$$

Вероятность продвижения на два шага хотя бы по одному из 9 направлений

$$P_2 = 1 - (1 - B_1P_1)(1 - B_2P_1)(1 - B_3P_1).$$

Из каждой точки второго уровня снова возможно движение в трех направлениях. Но тогда из точек $A_1$, $A_2$, $A_3$ можно переместиться на два шага с вероятностью $P_2$, а из точки $A$ в точки третьего уровня с вероятностью

$$P_3 = 1 - (1 - B_1P_2)(1 - B_2P_2)(1 - B_3P_2).$$

В общем случае, если $n$ шагов можно пройти с вероятностью $P_n$, то из точек $A_1$, $A_2$, $A_3$ получим вероятность продвижения на $n + 1$ шагов:

$$P_{n+1} = 1 - (1 - B_1P_n)(1 - B_2P_n)(1 - B_3P_n),$$

где $P_0 = 1$, что очевидно.

Особо важно, что при $B_1$, $B_2$, $B_3 < 1$ рекурсивно определенная последовательность $\{P_n\}$ сходится к числу $P$, зависящему только от $B_1$, $B_2$, $B_3$, но не от $n$, причем точность достигается за число шагов, значительно меньшее необходимого.

Сходимость процесса при $P_0 = 1$ и $0 \le B_1, B_2, B_3 \le 1$ можно доказать графически.

Построим график функции $y = 1 - (1 - B_1x)(1 - B_2x)(1 - B_3x)$. Точку перегиба этой функции находим при $x_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \frac{1}{B_3}\right) \ge 1$ при любых $B_1$, $B_2$, $B_3$. Значение $x_0 = 1$ имеет место только при $B_1 = B_2 = B_3 = 1$.

Из вероятностного смысла функции $y$ следует, что в точке $x = 1$ имеем $y(1) < 1$. Проведем прямую $y = x$ (рис. 2). Известно, что рекурсивная последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ может быть геометрически представлена цепью уголков. Их вертикальные сто-

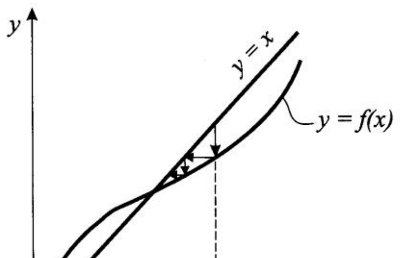


Рис. 2. Графическая интерпретация определения вероятности при рекурсивном вычислении

роны проведены от прямой $y = x$ до графика функции $y = f(x)$, а горизонтальные – из полученных точек на прямую $y = x$.

В ситуации, показанной на рис. 2 ($y(1) < 1$, $y' > 0$, $x_0 < 1$), такая цепь уголков всегда сходится в точке пересечения графика $y = f(x)$ и прямой $y = x$, т. е. в точке $x = f(x)$. Если при этом $y'(0) > 1$, то точка пересечения $x_0 > 0$. Для нашей функции условие $y'(0) > 1$ равносильно условию $B_1 + B_2 + B_3 > 1$.

Найдем точку пересечения, решив уравнение

$$P = 1 - (1 - B_1P)(1 - B_2P)(1 - B_3P).$$

После преобразований получим

$$B_1B_2B_3P^3 - (B_1B_2 + B_2B_3 + B_1B_3)P^2 + (B_1 + B_2 + B_3 + 1)P = 0,$$

откуда $P = 0$ (очевидное решение) или

$$P = \frac{(B_1B_2 + B_2B_3 + B_1B_3) - \sqrt{D}}{2B_1B_2B_3},$$

где $D = (B_1B_2)^2 + (B_1B_3)^2 + (B_2B_3)^2 - 2B_1B_2B_3(B_1 + B_2 + B_3) + 4B_1B_2B_3$.

Второе решение квадратного уравнения $P > 1$ и для нас не имеет смысла.

Если $B_1 = B_2$ (повороты влево и вправо), то

$$P = \frac{1}{B_1} + \frac{1}{2B_3} - \frac{\sqrt{1 - \frac{4B_3}{B_1} + \frac{4B_3}{B_1^2}}}{2B_3} = \frac{1}{B_1} + \frac{1}{2B_3} - \frac{\sqrt{1 + \frac{4B_3}{B_1^2}(1 - B_1)}}{2B_3}.$$

Условие $1 - \frac{4B_3}{B_1} + \frac{4B_3}{B_1^2} \geq 0$ всегда выполнимо, так как

$$1 - \frac{4B_3}{B_1} + \frac{4B_3}{B_1^2} > 1 - \frac{4B_3}{B_1} + \frac{4B_3}{B_1} = 1 > 0.$$

Окончательно имеем

$$P = \frac{1}{B_1} + \frac{1}{2B_3}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4B_3}{B_1^2}(1 - B_1)}\right). \qquad (1)$$

Приведем пример расчета*. Пусть плотность размещения деревьев на единице площади $\rho = 0{,}1$; ширина колеи вездехода $b = 2$ м; шаг движения $0{,}5\,b = 1$ м.

Вероятность поворота вправо или влево

$$B_1 = e^{-0{,}6142 b^2\rho} = e^{-0{,}6142\cdot 4\cdot 0{,}1} = e^{-0{,}2457} \approx 0{,}7821;$$

---

* *Иванов, Н.А.* Оценка проходимости трехколесного вездехода по лесистой местности [Текст] / Н.А. Иванов, Е.А. Мясников // Лесн. журн. – 2005. – № 5. – С. 45–53. – (Изв. высш. учеб. заведений).

движения вперед

$$B_3 = \mathrm{e}^{-0,5b^2\rho} = \mathrm{e}^{-0,5\cdot 4\cdot 0,1} = \mathrm{e}^{-0,2} \approx 0,8187.$$

Тогда по формуле (1)

$$P = \frac{1}{0,7821} + \frac{1}{1,6374}\left(1 - \sqrt{1 + 4\frac{0,8187}{(0,7821)^2}\left(1 - 0,7821\right)}\right) = 0,9904.$$

При рекурсивном вычислении находим (с округлением):

$$P_0 = 1;\ P_1 = 1 - (1 - 0,7821)^2\,(1 - 0,8187) = 0,99199;$$

$$P_2 = 1 - (1 - 0,7821P_1)^2\,(1 - 0,8187P_1) = 0,9905;$$

$$P_3 = 1 - (1 - 0,7821P_2)^2\,(1 - 0,8187P_2) = 0,9903(9) = 0,9904.$$

Если под шагом считать сдвиг на 0,1 м (поворот на угол $\alpha = 5,7°$), то

$$B_1 = \mathrm{e}^{-0,02\cdot 1,2953} \approx 0,9744;$$

$$B_3 = \mathrm{e}^{-0,02} \approx 0,9802;$$

$$P = \frac{1}{0,9744} + \frac{1}{2\cdot 0,9802}\left(1 - \sqrt{1 + 4\frac{0,9802}{(0,9744)^2}\left(1 - 0,9744\right)}\right) \approx 1.$$

Таким образом, при высокой маневренности вездехода и определенной плотности размещения деревьев движение по лесистой местности теоретически достоверно. Следует учесть, что для осмотра и выбора пути доступен небольшой участок. Если $R$ – радиус обзора, а возврат назад невозможен, более справедливо считать вероятность $P(\Delta L = L)$ равной $(P)^{L/R}$, где $P = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$ при быстрой сходимости, т. е. при больших $B_1$, $B_2$, $B_3$, или $P = P_n$ при $n = \frac{2R}{l}$ и шаге $\frac{l}{2}$; или $n = \frac{2R}{l\alpha}$ при шаге $\frac{l\alpha}{2}$ и малых $B_1$, $B_2$, $B_3$.

*Решение обратной задачи*

С практической точки зрения представляет интерес решение обратной задачи, когда по известной вероятности преодоления лесистой местности определяют ширину колеи вездехода. Эта задача допускает только приближенное решение.

Если вероятность $P$ известна, необходимо подобрать максимально возможную ширину колеи $b$, чтобы

$$1 - (1 - B_1P)(1 - B_2P)(1 - B_3P) = P,$$

где $B_i = B_i(b)$, $i = 1, 2, 3$ – вероятности сдвига влево, вправо, вперед для фиксированной плотности $\rho$.

Преобразования с учетом $B_1 = B_2$ и $B_3 = B_1^{\beta}$, где $\beta = \mathrm{const}$, приводят к уравнению

$$P^2B_1^{3+\beta} - PB_1^2\left( + B_1^{\beta}\right) + B_1\left( + B_1^{\beta}\right) = 1.$$

Решение данного уравнения относительно $B_1$ достаточно сложно.

Учитывая, что $\beta \approx 1$ (при шаге $0{,}5b$ $\beta = 1{,}2284$, при шаге $0{,}5b\alpha$ $\beta = \dfrac{1+3\alpha\sqrt{3}}{1+\alpha\sqrt{3}}$), уравнение можно упростить:

$$P^2B_1^{\,3} - 3PB_1^{\,2} + 3B_1 = 1,$$

тогда решение

$$B_1 = \frac{1-\sqrt[3]{1-P}}{P}.$$

Параметр $B_1$ найден ранее как вероятность поворота

$$P(\text{л}) = P(\text{пр}) = \mathrm{e}^{-(1{,}0472b_0^2 - 0{,}433b^2)\rho}.$$

Отсюда выразим $b$ через $B_1$, $\rho$ и $R_0$:

$$1{,}0472\,b_0^2 - 0{,}433b^2 = \frac{1}{\rho}\ln\frac{1}{B_1}$$

и далее приведем к виду

$$1{,}0472\,(b^2 + 2\cdot 2bR_0 + 4R_0^{\,2}) - 0{,}433b^2 + \frac{1}{\rho}\ln B_1 = 0$$

или

$$0{,}6142b^2 + 2\cdot 2{,}0944R_0b + (1{,}0472\cdot 4R_0^{\,2} + \frac{1}{\rho}\ln B_1) = 0.$$

Решим квадратное уравнение

$$b = \frac{-2{,}0944\cdot 2R_0 \pm \left[4(2{,}0944\,R_0)^2 - 4\cdot 0{,}6142\left(1{,}0472\cdot 4R_0^2 + \frac{1}{\rho}\ln B_1\right)\right]^{1/2}}{2\cdot 0{,}6142},$$

т. е.
$$b = (4{,}808R_0^{\,2} + \frac{1{,}628}{\rho}\ln\frac{1}{B_1})^{1/2} - 3{,}408R_0. \qquad (2)$$

Решение взято с запасом по сравнению с точным.

При $R_0 = 0$ результат можно упростить, поскольку среднее расстояние между деревьями $S_m = \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}$ (для круговых площадей).

Тогда по формуле (2)

$$b \approx 1{,}276\,S_m\sqrt{\ln\frac{1}{B_1}}.$$

Так, для ρ = 0,1 и $P$ = 0,999 получаем $B_1 = \frac{1-0{,}1}{0{,}999} \approx 0{,}9$; $b = 1{,}276(10\ln 1{,}11)^{1/2} \approx 1{,}3$ м. Для ρ = 1 и $P$ = 0,992 получаем $B_1 = \frac{1-0{,}2}{0{,}999} = 0{,}80645$; $b = 0{,}592 \approx 0{,}6$ м.

Вычисления даны для шага $\Delta L = 0{,}5b$.

Хабаровский государственный
технический университет

Поступила 26.05.03

*N.A. Ivanov, E.A. Myasnikov*

**Estimated Probability of Overcoming Woodland by Landrover**

Results of theoretical studies are provided related to probability of overcoming woodland by light three-wheeled landrover on pneumatic low-pressure tires at high maneuverability.